БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

МАТЕМАТИКА

Г. З. Генкин

Геометрические решения негеометрических задач

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

Г. З. Генкин

Геометрические решения негеометрических задач

Книга для учителя

Москва
«Просвещение»
2007

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Г34

Серия «Библиотека учителя» основана в 2000 г.

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор, академик РАО РФ,
директор Института продуктивного обучения *М. И. Башмаков*;
кандидат педагогических наук,
заслуженный работник культуры РФ,
главный редактор журнала «Математика в школе»
А. И. Верченко

Генкин Г. З.
Г34 Геометрические решения негеометрических задач : кн. для учителя / Г. З. Генкин. — М. : Просвещение, 2007. — 79 с. : ил. — (Библиотека учителя). — ISBN 978-5-09-015104-7.

Книга состоит из пяти этюдов, посвященных решению разных типов негеометрических задач геометрическими методами. Книга также поможет учащимся 8—11 классов на этапе итогового повторения и для подготовки к сдаче вступительного экзамена в вуз.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-015104-7

Посвящается памяти
Игоря Федоровича Шарыгина

К ЧИТАТЕЛЮ

ДОРОГИЕ РЕБЯТА! Книга, которую вы взяли в руки, является сборником традиционных, но непростых, можно сказать трудных, задач, причем некоторые из них иногда даже называют задачами-монстрами.

По-настоящему понять задачу и ее решение, на наш взгляд, можно только в общении с хорошим «решальщиком». В этом смысле книга и есть «решальщик», так как значительная часть задач приводится с решениями. Эти решения отличаются от привычных, школьных. Наши решения надо «смотреть», т. е. решение в основном «лежит в рисунке».

Постарайтесь понять идеи решений еще в 8 классе, и тогда, оканчивая школу и готовясь к итоговой аттестации в 11 классе по математике и вступительному экзамену в вуз, вы сможете многие задачи решать почти мгновенно.

В книге вы найдете для себя и задачи без решений. Выполнить их можно одним из многих приемов — образцов. Не огорчайтесь, если вы этот прием не сразу увидите. Однако, когда задача будет решена, вы получите истинное удовольствие от самостоятельно выполненной работы, так как размышление над условием задачи, поиск решения и его реализация обогатят ваш опыт.

Помните, что наш земляк, великий русский поэт Александр Сергеевич Пушкин (1799—1837), однажды, решив задачу, воскликнул: «В математике есть своя красота, как в живописи и поэзии».

Уважаемые учителя! Перед вами еще одно дидактическое средство, способное, на наш взгляд, оказать вам помощь в нелегком деле — обучении школьников искусству решать математические задачи.

Все мы, дорогие коллеги, в конечном счете стараемся научить своих учеников решать задачи, так как решение задач — это сердцевина, смысл и внутренняя пружина самой математики. Сначала появляется задача, и лишь затем мы ищем или строим теорию для ее решения. Поэтому изучать саму математику можно, на наш взгляд, только с помощью задач, приходя самостоятельно к необходимым теоретическим выводам и обобщениям или совершая поиск нужных сведений в различных публикациях. Такой путь изучения математики, как нам кажется, очень увлекателен.

Уникальность математической задачи заключается в том, что, во-первых, задачи являются для ученика своеобразной областью применения его формальных знаний (проявляется компетентность ученика). Во-вторых, задачи позволяют ученику проверить правильность приобретенных знаний (задачи как контрольно-измерительный материал). В-третьих, задачи формируют у ученика умение анализировать ситуацию, систематизировать и классифицировать условия, подчас самостоятельно получая открытия (задачи как средство познания). В-четвертых, задачи способствуют повышению уровня заинтересованности ученика к изучению математики (задачи как мотив познания). В-пятых, что тоже немаловажно, решение задач может доставить ученику эстетическое удовольствие (ощущение радости от решения задачи недоступно тем, кто ни разу не попробовал выполнить это самостоятельно и не добился успеха).

Наша книга состоит из пяти этюдов о решении задач (часто задачи объединены в серии). Эти решения, как правило, отличаются от тех, которые приводятся в учебниках. Наши решения почти не содержат пояснительный текст. Символьный ряд решения в основном также невелик. Зато усилена визуальная составляющая решения (почти для каждой задачи приведен рисунок). Школьники «смотрят» решение на рисунке и получают ответ.

На наш взгляд, нетрадиционные приемы решения задач позволяют полнее раскрыть потенциал школьников, приобщить их к творчеству, к исследовательской деятельности и проиллюстрировать детям внутриматематические связи. Иногда для сравнения к одной задаче предлагаются два-три способа решения.

В каждом этюде приведены геометрические приемы решения задач. Они, как правило, не обладают для учащихся признаком привычности, но, как показывает опыт, легко ими воспринимаются. Благодаря интеграции «негеометричности» условия задачи и ее геометрического решения математические знания предстают перед учащимися как живая, динамичная система, способная решать задачи из других наук и практики. По существу, действует двусторонний процесс: обучение математике и обучение математикой. В конце каждого этюда приводятся упражнения для самостоятельного решения. Предваряет упражнения небольшой информационный блок как основа приемов их выполнения.

Некоторые задачи, дорогие коллеги, могут показаться вам сложными для выбора их в качестве упражнений на уроке, тогда можно рассмотреть их на кружковых или факультативных занятиях как упражнения элективных курсов. А если переформулировать условие, то эти задачи вполне по силам учащимся и в основной школе (8—9 классы). Те задачи, решения которых требуют от учащихся формальных знаний из курса математики 10—11 классов, отмечены знаком *.

В общем, как когда-то заметил Д. Пойа, «обучение — это ремесло, использующее бесчисленное количество маленьких трюков».

Любая книга является собеседником, спутником человека.

Надеюсь, что наша книга не покажется вам, уважаемые коллеги, пустой и скучной. Желаю вам успехов!

Автор

Арифметические знаки — это записанные геометрические фигуры, а геометрические фигуры — это нарисованные формулы.

Д. Гильберт

Этюд 1. РЕШАЕМ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Предлагаем вам задачи, большинства которых нет в системах упражнений школьных учебников по математике.

Разбирая наши решения, обращайтесь за сведениями в информационный блок № 1 или за советами к учителю.

Напоминаем, что решения задач с номерами, отмеченными *, требуют формальных знаний из курса математики 10—11 классов.

Итак, перед вами *негеометрические* задачи (системы уравнений) и их геометрические решения.

1. Из условий $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 + z^2 = 16$ и $y^2 = xz$ для положительных x, y, z, не вычисляя их значений, укажите значение выражения $xy + yz$.

Решение. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y^2+z^2=16 \\ y^2=xz \end{cases}$ нетрудно.

Можно, например, так:

$x^2 + 2y^2 + z^2 = 25$ (сложили 1-е и 2-е уравнения),

$x^2 + 2xz + z^2 = 25$ (заменили y^2 из 3-го уравнения),

$(x + z)^2 = 5^2$, $z = 5 - x$ (так как $x > 0$ и $z > 0$),

$x^2 + x(5 - x) = 9$ (подставили в 1-е уравнение).

Далее решаем уравнение, получаем $x = 1{,}8$ и затем подсчитываем: $z = 3{,}2$ и $y = 2{,}4$. Значение выражения $xy + yz$ равно $1{,}8 \cdot 2{,}4 + 2{,}4 \cdot 3{,}2 = 12$.

Но задача *не требует* решать систему и затем считать значение выражения $xy + yz$. Наоборот, подсчитать это значение надо, *не решая* систему уравнений.

Вот как мы будем это делать.

Так как $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то задачу можно интерпретировать геометрически.

По теореме, обратной теореме Пифагора, числа x, y и 3 являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника ABD (угол D прямой).

Тогда, рассмотрев второе уравнение системы, можно сделать вывод, что y, z и 4 являются соответственно длинами катетов и гипотенузы треугольника BCD с прямым углом D (рис. 1.1).

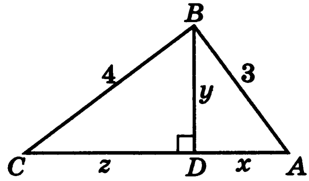


Рис. 1.1

Третье уравнение системы разрешает утверждать, что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z. Тогда по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, угол ABC прямой (рис. 1.2).

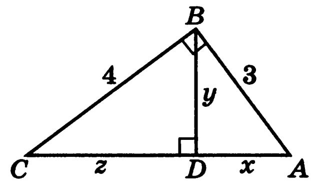


Рис. 1.2

Теперь, чтобы ответить на главный вопрос задачи, рассмотрим выражение $xy + yz$.

$$xy + yz = (x + z) \cdot y = \\ = 2S_{\triangle ABC} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Ответ. 12.

Замечание. Для данной системы задания могут быть и другие. Например: *в каком отношении находятся числа x и y, z и y?* Постарайтесь найти значения этих дробей. Придумайте другие вопросы.

В дальнейшем мы очень редко будем предлагать разные решения.

2. Вычислите значение $y \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z})$, если $y > 0$, $x + y^2 = 7{,}25$, $y^2 - z = 2$ и $y^2 = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2-z}$.

Решение. Во-первых, $x \neq 1$ и $z \neq 2$. Действительно, если $x = 1$ или $z = 2$, то $y = 0$. Однако пара чисел 1 и 0 не удовлетворяет условию $x + y^2 = 7{,}25$. Аналогично пара чисел 0 и 2 не удовлетворяет условию $y^2 - z = 2$.

Во-вторых, для $x > 1$ и $z < 2$ условия $x + y^2 = 7{,}25$ и $y^2 - z = 2$ можно трансформировать соответственно в уравнения

$$(\sqrt{x-1})^2 + y^2 = 6{,}25 \text{ и}$$
$$y^2 + (\sqrt{2-z})^2 = 4.$$

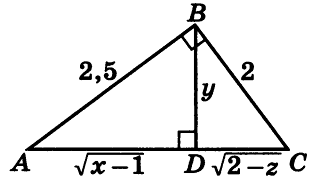


Рис. 1.3

В-третьих, рассуждая так же, как и в задаче 1, получаем (см. рис. 1.3):

$$y \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}) = 2S_{\triangle ABC} = \\ = 2{,}5 \cdot 2 = 5.$$

Ответ. 5.

3. Для положительных x, y и z из условий $y^2 + z^2 = 50$, $x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} = 169$, $x^2 + xz + \dfrac{z^2}{2} = 144$, не находя значений x, y и z, вычислите значение выражения $xy + yz + zx$.

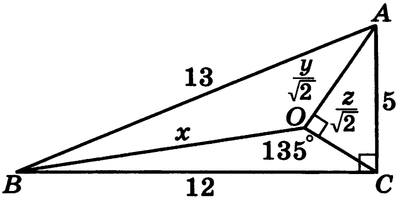


Рис. 1.4

Решение. Запишем три условия задачи в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} = 169 \\ \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{2} = 25 \\ x^2 + xz + \dfrac{z^2}{2} = 144. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Пифагора, числа $\frac{y}{\sqrt{2}}$, $\frac{z}{\sqrt{2}}$ и 5 являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника AOC с прямым углом AOC, а числа x, $\frac{y}{\sqrt{2}}$ и 13 есть длины сторон треугольника AOB с углом AOB, равным 135°. Этот вывод можно сделать, используя теорему, обратную теореме косинусов. Аналогично x, $\frac{z}{\sqrt{2}}$ и 12 есть длины сторон треугольника BOC с углом BOC, равным 135°. На рисунке 1.4 изображены эти треугольники.

Так как $5^2 + 12^2 = 13^2$, то в треугольнике ABC $\angle ACB = 90°$.

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot x \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \sin 135° = \frac{1}{4} xy;$$

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} yz;$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} \cdot \sin 135° = \frac{1}{4} xz;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$$

Отвечая на главный вопрос задачи, заметим, что значение выражения $xy + yz + zx$ равно учетверенной площади треугольника ABC. Итак, $xy + yz + zx = 120$.

Ответ. 120.

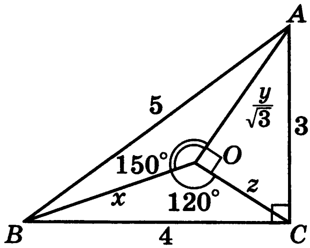


Рис. 1.5

4. Для положительных x, y и z, не вычисляя их значений из системы уравнений $x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25$, $\frac{y^2}{3} + z^2 = 9$, $z^2 + xz + x^2 = 16$, определите величину $xy + 2yz + 3xz$.

Решение. Рассуждая так же, как и в задаче 3, получаем (см. рис. 1.5):

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}x \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \sin 150° + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} z + \frac{1}{2} xz \sin 120° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot z + \frac{1}{2} \cdot x \cdot z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(xy + 2yz + 3xz).$$

Так как площадь треугольника ABC равна 6, то $xy + 2yz + 3xz = 24\sqrt{3}$.

Ответ. $24\sqrt{3}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ \dfrac{xy}{z} = 12. \end{cases}$

Решение.

1) Если $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то существует треугольник ABC с прямым углом C, у которого x и y — катеты, а z — гипотенуза (рис. 1.6).

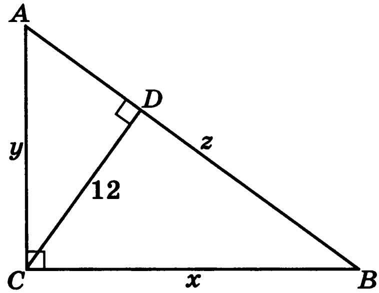


Рис. 1.6

Периметр этого треугольника равен 60, а длина его высоты, проведенной из вершины прямого угла, равна 12. Из первого уравнения получаем, что $(x + y)^2 = (60 - z)^2$, а из второго и третьего уравнений: $(x + y)^2 = z^2 + 24z$. Приравняв правые части последних уравнений, заметим, что $144z = 60^2$, т. е. $z = (5 \cdot 12)^2 : 12^2 = 25$.

Далее наша система позволяет получить другую:

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ xy = 300. \end{cases}$$

В этой системе одно неизвестное 15, а второе 20. Значит, исходная система имеет решения: (15; 20; 25) и (20; 15; 25).

2) В условии системы не оговаривается, что x, y и z — положительные числа. Из третьего уравнения следует, что два из трех неизвестных могут быть отрицательны. Однако по ходу решения мы убеждаемся, что $z > 0$. Значит, могут быть только $x < 0$ и $y < 0$. Но это невозможно, так как $x + y = 35$.

Ответ. (15; 20; 25), (20; 15; 25).

6. Имеет ли система уравнений $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 + xz + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$ решения для $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$?

Решение. Допустим, что есть такая тройка положительных чисел x, y, z, удовлетворяющая каждому уравнению

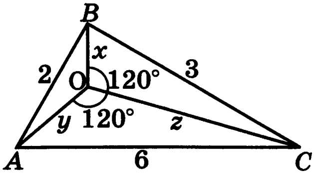


Рис .1.7

данной системы. Тогда возможна ее геометрическая интерпретация на рисунке 1.7 (см. рассуждения в задаче 3). Но треугольник ABC не существует, так как не выполняется неравенство треугольника. Значит, система не имеет решений.

Ответ. $\varnothing$.

Замечание. Для положительных x, y и z данная система имеет решение, если в правой части третьего уравнения взято число из промежутка $(1; 25)$.

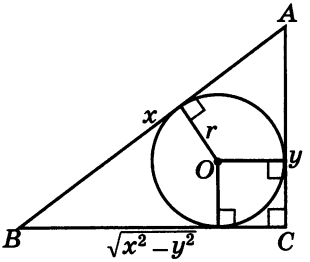


Рис. 1.8

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=48 \\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24. \end{cases}$$

Решение. Нетрудно убедиться, что x и y положительны.

Так как $y^2+(\sqrt{x^2-y^2})^2=x^2$, то числа y, $\sqrt{x^2-y^2}$ и x являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника ABC с прямым углом ACB (рис. 1.8).

Площадь этого треугольника 24 кв. ед., а его периметр 24 лин. ед. Тогда радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен 2. Так как длина гипотенузы AB равна сумме длин катетов AC и BC без удвоенной длины радиуса вписанной в этот треугольник окружности, то $x=y+\sqrt{x^2-y^2}-4$.

Из второго уравнения системы получаем $x=10$. Значит, $y=6$ или $y=8$.

Ответ. $(10; 6)$, $(10; 8)$.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 1.9) и катетами $\sqrt{x^2+5}$ и $\sqrt{y^2-5}$. Сумма катетов треугольника равна 5, а гипотенуза $\sqrt{13}$.

Если обозначить катеты традиционно буквами a и b, то получим $a+b=5$ и $a^2+b^2=13$. Отсюда следует, что $ab=6$. Значит, катеты треугольника ABC имеют длины 2 и 3. Но $\sqrt{x^2+5}\neq 2$, так как $\sqrt{x^2+5}\geqslant\sqrt{5}$. Итак, $\sqrt{x^2+5}=3$, $\sqrt{y^2-5}=2$. Тогда $|x|=2$ и $|y|=3$.

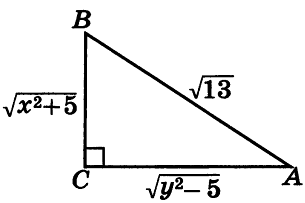


Рис. 1.9

Ответ. $(2; 3)$, $(-2; 3)$, $(-2; -3)$, $(2; -3)$.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$

Решение. Очевидно, что $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$. Допустим, существует треугольник, длины сторон которого удовлетворяют данной системе. Из первого уравнения имеем $z = \sqrt{3} - (x + y)$.

Тогда второе уравнение принимает вид:

$$x^2 + y^2 + 3 - 2\sqrt{3}(x + y) + (x + y)^2 = 1. \qquad (1)$$

Преобразовав это уравнение, получаем квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 + (y - \sqrt{3}) \cdot x + (y^2 - y\sqrt{3} + 1) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $-(y\sqrt{3} - 1)^2$. Так как мы предположили, что треугольник существует, то $-(y\sqrt{3} - 1)^2 \geqslant 0$. Неравенство выполняется при $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Уравнение (1) можно было преобразовать в квадратное относительно y. Тогда $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Значение z подсчитывается из первого уравнения: $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\ \dfrac{1}{\sqrt{3}};\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Замечание. Задачу можно переформулировать. Например, *определить вид треугольника, периметр которого равен* $\sqrt{3}$, *а сумма квадратов длин его сторон равна* 1.

Ответ. Равносторонний треугольник.

10*. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$

Решение.

Первый способ. Уравнение $x + y + z = 3$ есть уравнение плоскости (рис. 1.10), пересекающей оси прямоугольной декартовой системы координат в точках A (3; 0; 0), B (0; 3; 0), C (0; 0; 3).

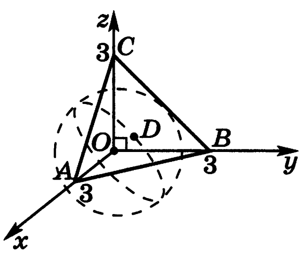


Рис. 1.10

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ есть уравнение сферы с центром в точке O (0; 0; 0) и радиусом R, равным $\sqrt{3}$.

Вычислим расстояние от точки O до плоскости ABC. Для этого рассмотрим тетраэдр $OABC$.

Объем V тетраэдра равен $\dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot H$, где $H = OD$ (D — центр треугольника ABC), т. е.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{3H\sqrt{3}}{2}.$$

Объем тетраэдра может быть подсчитан иначе: $\frac{1}{3} S_{\triangle OAB} \cdot CO$, т. е. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Приравняв $\frac{3H\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{9}{2}$, получаем $H = \sqrt{3}$. Это означает, что расстояние от точки O до плоскости ABC равно радиусу сферы, т. е. плоскость касается сферы. Следовательно, точка касания является центром треугольника ABC.

Так как $D\,(x;\ y;\ z)$ — центр равностороннего треугольника ABC, где $A\,(3;\ 0;\ 0)$, $B\,(0;\ 3;\ 0)$, $C\,(0;\ 0;\ 3)$, то $x = y = z$.

Заменив y и z на x в уравнениях данной системы, получаем $x = 1$.

Второй способ. Рассмотрим $\vec{a}\,(x;\ y;\ z)$ и $\vec{b}\,(1;\ 1;\ 1)$.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{3}$, $\quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = 3$, $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$,
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Значит, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

Ответ. $(1;\ 1;\ 1)$.

11*. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим $\vec{a}\,(x;\ y;\ z)$ и $\vec{b}\,(1;\ 1;\ 1)$.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = 1$, $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} = 1$.

Значит, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, т. е. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а отсюда $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

Ответ. $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

12*. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{3} \\ x\log_z y = 2. \end{cases}$

Решение. Из предыдущей задачи имеем $x = y = z = \frac{1}{3}$. Проверим эти числа в третьем уравнении: $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 \neq 2$.

Ответ. $\varnothing$.

13*. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x + 3^y + 3^z = 9 \\ 9^x + 9^y + 9^z = 27 \\ x^y + y^z + z^x = 3. \end{cases}$

Решение. Заменим 3^x на m, 3^y на n, 3^z на k, тогда наша система примет вид

$$\begin{cases} m + n + k = 9 \\ m^2 + n^2 + k^2 = 27 \\ x^y + y^z + z^x = 3. \end{cases}$$

Так же, как и в задачах 10 и 11, нетрудно убедиться, что $m = n = k = 3$. Сделав обратные замены, получим $x = y = z = 1$. Эти числа удовлетворяют и третьему уравнению.

Ответ. (1; 1; 1).

14*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 9y^2z^2 + 4x^2z^2 + 25x^2y^2 = 16x^2y^2z^2 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 9 \\ x - y\sqrt{3} + z\sqrt{15} = 7{,}5. \end{cases}$$

Решение. Нетрудно убедиться, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Тогда первое уравнение системы равносильно уравнению $\frac{9}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{25}{z^2} = 16$.

Рассмотрим векторы $\vec{a}\left(\frac{3}{x};\ \frac{2}{y};\ \frac{5}{z}\right)$ и $\vec{b}\,(x;\ 2y;\ z)$. Модуль первого вектора равен $\sqrt{\frac{9}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{25}{z^2}}$, т. е. $|\vec{a}| = 4$. Модуль второго вектора равен $\sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}$, т. е. $|\vec{b}| = 3$.

Скалярное произведение рассматриваемых векторов равно $\frac{3}{x} \cdot x + \frac{2}{y} \cdot 2y + \frac{5}{z} \cdot z$, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Значит, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Отсюда следует, что ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны, т. е. $\frac{3}{x^2} = \frac{1}{y^2} = \frac{5}{z^2}$. Далее, $y^2 = \frac{x^2}{3}$, $z^2 = \frac{5x^2}{3}$, и из второго уравнения системы имеем $x^2 = \frac{9}{4}$, $y^2 = \frac{3}{4}$, $z^2 = \frac{15}{4}$. Из восьми возможных троек чисел, модули которых соответственно $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{15}}{2}$, третьему уравнению системы удовлетворяют только две: $\left(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

Ответ. $\left(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

15*. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y^2+z^3=2 \\ x^2+y^3+z^4=4, \\ x^3+y^4+z^5=8 \end{cases}$ если $x>0,\ y>0,\ z>0$.

Решение. Рассмотрим векторы

$$\vec{a}\,(\sqrt{x};\ y;\ z\sqrt{z}) \text{ и } \vec{b}\,(x\sqrt{x};\ y^2;\ z^2\sqrt{z}).$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x+y^2+z^3}=\sqrt{2},\quad |\vec{b}|=\sqrt{x^3+y^4+z^5}=2\sqrt{2}.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{x}\cdot x\sqrt{x}+y\cdot y^2+z\cdot\sqrt{z}\cdot z^2\sqrt{z}=x^2+y^3+z^4=4.$$

$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4$. Значит, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, т. е. $\vec{a}\upuparrows\vec{b}$, а отсюда $\dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\dfrac{y}{y^2}=\dfrac{z\sqrt{z}}{z^2\sqrt{z}}$ и $x=y=z$.

Перепишем уравнения данной системы, заменив y и z на x:

$$\begin{cases} x+x^2+x^3=2 \\ x^2+x^3+x^4=4 \\ x^3+x^4+x^5=8; \end{cases}\qquad \begin{cases} x+x^2+x^3=2 \\ x(x+x^2+x^3)=4 \\ x^2(x+x^2+x^3)=8. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений системы $x=2$. Если $x=2$ и $x+x^2+x^3=2$, то удовлетворяется третье уравнение системы. Однако при $x=2$ $x+x^2+x^3\neq 2$. Значит, данная система не имеет решений для положительных x, y и z.

Ответ. $\varnothing$.

16*. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^8+y^8+z^8=1 \\ x^4-2y^4+3z^4=\sqrt{42}. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим $\vec{a}\,(x^4;\ y^4;\ z^4)$ и $\vec{b}\,(1;\ -2;\ 3)$.

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^8+y^8+z^8}=1,\quad |\vec{b}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}.$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{42}$, $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{14}$. Так как $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\geqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, то данная система не имеет решений.

Замечание. Вывод получается и при рассмотрении равенства $\sqrt{42}=\sqrt{14}\cdot\cos\varphi$, где φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ. $\varnothing$.

17*. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3 \\ x+y+z=3 \\ \dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}=3. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим ненулевые векторы $\vec{a}\,(x;\ y;\ z)$, $\vec{b}\left(\dfrac{1}{y};\ \dfrac{1}{z};\ \dfrac{1}{x}\right)$, $\vec{c}\left(\dfrac{1}{z};\ \dfrac{1}{x};\ \dfrac{1}{y}\right)$, $\vec{d}\,(1;\ 1;\ 1)$. Тогда из первого уравнения следует $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, из второго уравнения — $\vec{a} \cdot \vec{d} = 3$, а из третьего — $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$.

Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, то $\vec{b} = \vec{c}$, т. е. $y = z = x$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{d}$, то $\vec{b} = \vec{d}$, т. е. $y = z = x = 1$;

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d}$, то $\vec{c} = \vec{d}$, т. е. $z = x = y = 1$*.

Ответ. (1; 1; 1).

18*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + yz = 0 \\ x^2 + x + y + 2yz = 0 \\ 3x^2 + 8y^2 + 8xy + 8yz - 2x - 4z = 2. \end{cases}$$

Решение. Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x(x+y) + y(y+z) = 0 \\ x(x+1) + y(2z+1) = 0 \\ 4(x+y)^2 + 4(y+z)^2 = (x+1)^2 + (2z+1)^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Рассмотрим векторы

$$\vec{a}\,(x;\ y),\ \vec{b}\,(x + y;\ y + z),\ \vec{c}\,(x + 1;\ 2z + 1).$$

Из первого уравнения получаем $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, из второго уравнения: $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, а из третьего уравнения: $4\vec{b}^2 = \vec{c}^2$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $x = y = 0$ и из третьего уравнения $z = -\frac{1}{2}$.

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, т. е. $\vec{c} = 2\vec{b}$ или $\vec{c} = -2\vec{b}$.

1) Если $\vec{c} = 2\vec{b}$, т. е. $x + 1 = 2\,(x + y)$ и $2z + 1 = 2\,(y + z)$. Из этих уравнений следует: $y = \frac{1}{2}$, $x = 0$, z — любое. Однако системе (2) удовлетворяют только $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$.

2) Если $\vec{c} = -2\vec{b}$, т. е. $x + 1 = -2\,(x + y)$ и $2z + 1 = -2\,(y + z)$. Из этих уравнений следует: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{4}x$, x — любое. Однако уже первое уравнение системы (2) не выполняется ни при каких значениях x.

Ответ. $\left(0;\ 0;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(0;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10. \end{cases}$$

---

* Убедитесь самостоятельно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{b} - \vec{d}$, $\vec{a}$ и $\vec{c} - \vec{d}$ не перпендикулярны.

Решение. Решение этой системы будет использоваться как образец для решения системы задачи 20, на наш взгляд, более сложной.

Рассмотрим слагаемые левой части второго уравнения:

$$\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}.$$

Пусть это — расстояние между точками $M\ (x;\ y)$ и $A\ (2;\ -1)$.

$$\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}.$$

Пусть это — расстояние между точками $M\ (x;\ y)$ и $B\ (10;\ 5)$.

Расстояние между точками $A\ (2;\ -1)$ и $B\ (10;\ 5)$ подсчитаем: $AB=\sqrt{(10-2)^2+(5+1)^2}=10.$

Итак, второе уравнение системы можно интерпретировать как $AM + BM = AB$, что дает нам право утверждать: $M \in AB$, причем точка M принадлежит отрезку AB, т. е. $2 \leqslant x \leqslant 10$ и $-1 \leqslant y \leqslant 5$.

Составим уравнение прямой AB, проходящей через точки $A\ (2;\ -1)$ и $B\ (10;\ 5)$: $-1 = k \cdot 2 + b$ и $5 = k \cdot 10 + b$. Отсюда $k=\frac{3}{4}$, $b=-\frac{5}{2}$, т. е. $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$ или $3x - 4y = 10$. Теперь $\begin{cases}3x+4y=26\\3x-4y=10.\end{cases}$ Значит, $x = 6$ и $y = 2$.

Ответ. (6; 2).

20. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2-14x-10y+58=0\\\sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104}=2\sqrt{29}.\end{cases}$$

Решение.

Первый способ. Если в задаче 19 можно было выразить, например, y через x из первого уравнения и затем, подставив во второе уравнение это выражение, решить второе уравнение как иррациональное, то в данном случае такой прием трудоемок.

Геометрическая интерпретация второго уравнения (см. задачу 19) приведет нас к решению системы

$$\begin{cases}x^2+y^2-14x-10y+58=0\\y=-\frac{2}{5}x+\frac{46}{5}\end{cases}$$

и далее к квадратному уравнению (закончите решение самостоятельно).

Второй способ. Этот способ включает в себя ту часть первого способа, в которой иррациональное уравнение заменяется на линейное.

Первое уравнение $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0$ преобразуем в уравнение $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

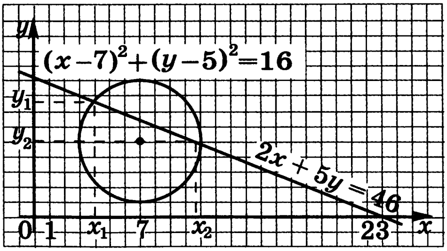


Рис. 1.11

Получилась система $\begin{cases}(x-7)^2+(y-5)^2=16\\ 2x+5y=46.\end{cases}$

Первое уравнение — это уравнение окружности с центром в точке (7; 5) и радиусом 4. Второе уравнение — это уравнение прямой, проходящей через точки (23; 0) и $\left(0;\ \frac{46}{5}\right)$. Взаимное расположение этих линий представлено на рисунке 1.11.

Так как получились две точки пересечения, то исходная система имеет два решения: $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$. Следует, однако, заметить, что при таком способе решения числа x_1 и y_1, x_2 и y_2 мы находим «на глаз», т. е. приближенно. Поэтому их необходимо проверить по условию.

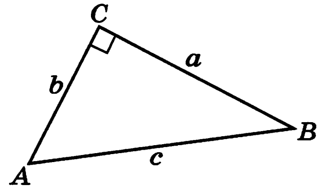
Ответ. $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК № 1

1. Теорема Пифагора

В треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т. е. $a^2 + b^2 = c^2$.

Обратно: если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный, т. е. если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a^2 + b^2 = c^2$, то в треугольнике ABC $\angle C = 90°$.

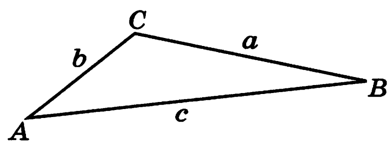


2. Теорема косинусов

В $\triangle ABC$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C.$$

Обратно: если
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C,$$

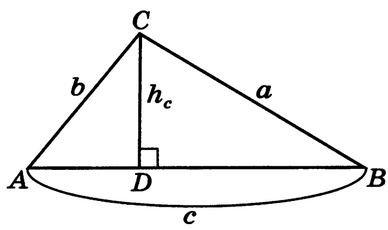
то существует треугольник ABC с такими сторонами и такими углами.



3. Площадь треугольника

$S_\triangle = \frac{1}{2} c \cdot h_c$; $S_\triangle = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$;

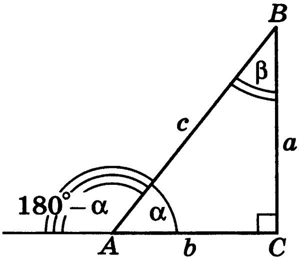
$S_\triangle = \frac{abc}{4R}$, R — радиус описанной окружности;



$S_\triangle = pr$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, r — радиус вписанной окружности;

$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

4. Прямоугольный треугольник



1) $\alpha + \beta = 90^\circ$.
2) $\sin\alpha = \cos\beta = \dfrac{a}{c}$,

   $\cos\alpha = \sin\beta = \dfrac{b}{c}$,

   $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta = \dfrac{a}{b}$,

   $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{b}{a}$.
3) Синусы смежных углов равны, т. е. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.
4) Косинусы смежных углов имеют равные модули и разные знаки, т. е. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.
5) Если углы дополняют друг друга до 90°, то синус (тангенс) одного равен косинусу (котангенсу) другого, т. е.
   $$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,\ \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha,$$
   $$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,\ \mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha.$$
6) Тангенс угла — это отношение синуса угла к его косинусу, а котангенс наоборот, т. е.
   $$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

5. Векторы

1) $\vec{a}\,(x_1; y_1)$ — вектор $\vec{a}$ с координатами x_1 и y_1,
   $\vec{b}\,(x_2; y_2)$ — вектор $\vec{b}$ с координатами x_2 и y_2,
   $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ — модуль (длина) вектора.
2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ — коллинеарные векторы ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ — сонаправленные, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ — противоположно направленные), $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$.
3) $\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2,\\ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})\end{array}\right\}$ скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не больше 180°),

   $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$, где $\vec{a}^{\,2}$ — скалярный квадрат $\vec{a}$.
4) $\vec{a}\cdot\vec{b} \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; если $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $b \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.
   Верны и обратные утверждения для ненулевых векторов.

6. Некоторые значения

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Шутка:

Если

№	1	2	3
α	30°	45°	60°

, то $\sin\alpha = \frac{\sqrt{№}}{2}$.

7. Формулы

$ax + by = c$, $y = kx + l$ — уравнение прямой;

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ — уравнение окружности с центром в точке $(a; b)$ и радиусом R;

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ — расстояние между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Лишь то ошибка, что не исправляется.
Конфуций

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для положительных x, y и z, не вычисляя их значений из системы уравнений $x^2+\frac{y^2}{3}+\frac{xy}{\sqrt{3}}=625$, $\frac{y^2}{3}+z^2+\frac{yz}{\sqrt{3}}=49$, $x^2+y^2+xz=576$, определите величину выражения $3xz+y(x+z)$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12. \end{cases}$

3. Докажите, что не существует таких чисел x и y, чтобы их сумма квадратов была равна 2, а сумма x и $4y$ равнялась 20.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=30 \\ x^2+y^2=z^2 \\ xy=6z. \end{cases}$

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}=10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+3y=17 \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}=10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+3y=14 \\ \sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}=5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x+2y=11 \\ \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}=5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x+y=9 \\ \sqrt{(x-4)^2+(y+7)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-1)^2}=10; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 4x+3y=33 \\ \sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-10)^2}=10\sqrt{2}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 4x-6y=7 \\ \sqrt{(x-7)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=10; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 3x-6y=2 \\ \sqrt{(x-8)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}=13; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x+2y=5 \\ \sqrt{(x+2)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-1)^2}=13; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ \sqrt{(x-5)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x-11)^2+(y-5)^2}=10; \end{cases}$

л) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ \sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=5; \end{cases}$

м) $\begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+7)^2}=10. \end{cases}$

6*. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^3+2y^3+z^3=3 \\ x^6+y^6+z^6=1. \end{cases}$

7*. Докажите, что система уравнений не имеет решений:

а) $\begin{cases} x^6+y^6+z^6=1 \\ x^3+3y^3-4z^3=\sqrt{30}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^4+y^4+z^4=1 \\ x^2+y^2-2z^2=2\sqrt{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^5+y^5-3z^5=8 \\ x^{10}+y^{10}+z^{10}=4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^8+y^8+z^8=5 \\ 5x^4-3y^4+7z^4=200; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 25x^{12}+16y^8+9z^4=1 \\ x^6+y^4+z^2=\frac{7}{15}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 36x^2+9y^4+4z^6=1 \\ 3x+3y^2+3z^3=2. \end{cases}$

8*. Докажите, что $x=y=z$, и найдите это число из системы уравнений $\begin{cases} x+y+z=18 \\ x^2+y^2+z^2=108. \end{cases}$

9*. Докажите, что все системы уравнений равносильны:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \\ x^4+y^4+z^4=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=3 \\ x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=3 \\ x^{2n+2}+y^{2n+2}+z^{2n+2}=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^x+2^y+2^z=6 \\ x^z+z^y+y^x=3 \\ 4^x+4^y+4^z=12. \end{cases}$

10*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4yz + y^4xz + z^4xy = 3xyz \\ x^4y^2z^2 + y^4x^2z^2 + z^4x^2y^2 = 3x^2y^2z^2 \\ x^6y^2z^2 + y^6x^2z^2 + z^6x^2y^2 = 3x^2y^2z^2. \end{cases}$$

11*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \\ \dfrac{z}{x} = \log_x y. \end{cases}$$

12*. Докажите, что $\sin x = \sin y = \sin z$, но при этом x, y и z могут быть разными:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 3 \\ \sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z = 3 \\ \sin^4 x + \sin^4 y + \sin^4 z = 3. \end{cases}$$

13*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2y^2 + 4y^2z^2 + x^2y^2 = 9x^2y^2z^2 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \\ 3x - 6y + z\sqrt{3} = 2. \end{cases}$$

14*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 + (x+z-2)(3+y) = 0 \\ x^2 + 3yz + 5z - 7y + 9z = 21 \\ 8x^2 + 18y(x+y+z) + 84x + 72y + 24z + 185 = 0. \end{cases}$$

15*. Для кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, корни которого x_1, x_2 и x_3, справедливы формулы Виета:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},\ \ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = \frac{c}{a},\ \ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}.$$

(Проверьте их самостоятельно.)

Сторонами треугольника являются корни заданного ниже уравнения. Не решая уравнение, вычислите площадь этого треугольника:

а) $x^3 - 24x^2 + 183x - 440 = 0$;
б) $x^3 - 42x^2 + 587x - 2730 = 0$;
в) $x^3 - 38x^2 + 635x - 3416 = 0$.

Учись мой сын, и легче и яснее
Державный труд ты будешь постигать.
А. Пушкин

Этюд 2. ЗАЙМЕМСЯ ТРИГОНОМЕТРИЕЙ

В последние десятилетия тригонометрия как отдельная дисциплина в школьном курсе математики перестала существовать и плавно «растеклась» не только *в геометрию и алгебру* основной школы, но и *в алгебру и начала анализа* старших классов всех типов общеобразовательных учреждений.

Однако многие упражнения могут быть выполнены школьниками еще в 8—9 классах. Для их решения требуются только те факты из учебников геометрии для основной школы, которые перечислены в информационном блоке № 2.

Приведем несколько примеров тригонометрических заданий. Читатель заметит, что часть заданий, взятых из сборника задач М. И. Сканави, довольно сложные, а вот решения, на наш взгляд, довольно простые.

Для каждого задания будем указывать, в какой параллели классов и как его можно решить. Иногда к заданию приведены для сравнения геометрическое и негеометрическое решения.

1. Вычислите tg 15°.

Решение. В 10 классе ученики, используя одну из теорем сложения, могут выполнить задание примерно так:

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(60° - 45°) = \frac{\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 45°}{1 + \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 45°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

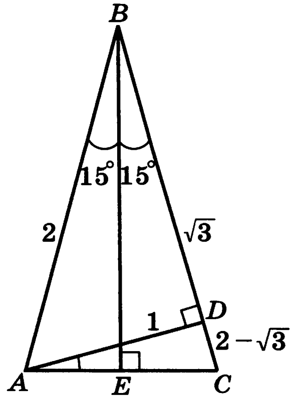


Рис. 2.1

Но и в 8 классе эта задача не потребует много времени на ее решение. Приведем его.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом ABC, равным 30°. Проведем в треугольнике высоты AD и BE. $\angle CAD = 15°$. $\operatorname{tg} 15° = \frac{CD}{AD}$. Если $AD = 1$, то $AB = 2$ и $BD = \sqrt{3}$. Значит, $CD = 2 - \sqrt{3}$ (рис. 2.1).

Ответ. $2 - \sqrt{3}$.

Замечание. Фактически задача решена устно по рисунку 2.1. По этому же рисунку вычислите $\sin 15°$, $\cos 15°$, $\operatorname{ctg} 15°$ и *более сложные задачи*:

а) *вычислите* $\operatorname{ctg} 30° + \operatorname{ctg} 75°$;

б) *проверьте равенство* $\operatorname{tg} 75° - 4 \sin 30° = \operatorname{ctg} 30°$.

<u>2.</u> Вычислите $\operatorname{tg} 22°30'$.

<u>**Решение.**</u> В 10 классе ученики это задание выполняют, практически не анализируя условие, сразу по формуле $|\operatorname{tg} \alpha| = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$ и получают результат $\operatorname{tg} 22°30' = \sqrt{2} - 1$.

Следует заметить, что при этом потребуется выполнить преобразование числового выражения $\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}$ в выражение $\sqrt{2}-1$. Конечно, можно воспользоваться и формулой $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

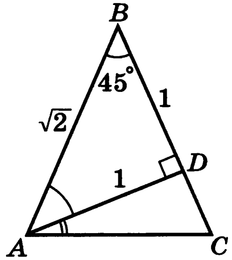


Рис. 2.2

В 8 классе задача решается значительно легче и быстрее.

Рассмотрим, как и в задаче 1, равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом ABC, равным 45° (рис. 2.2).

Так как $\angle BCA = 67°30'$, то $\angle CAD = 22°30'$.

Теперь решение совсем простое, устное и по рисунку. Так как $\operatorname{tg} 22°30' = \dfrac{CD}{AD}$, то пусть $AD = 1$, а CD вычислим:

$CD = BC - BD = AB - AD = \sqrt{2AD^2} - AD = \sqrt{2} - 1.$

Ответ. $\sqrt{2} - 1$.

Замечание. Так же как и для первой задачи, и здесь вычислите $\sin 22°30'$, $\cos 22°30'$ и *более сложное задание*: *проверьте равенство* $\operatorname{tg} 45° + \operatorname{ctg} 67°30' = 2 \sin 45°$.

<u>3.</u> Докажите тождество $\cos 36° - \cos 72° = \dfrac{1}{2}$.

<u>**Доказательство.**</u> Эта задача гораздо сложнее. В 10 классе для ее решения потребуется применение нескольких формул, а именно:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha),$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

(Причем последние две формулы используются каждая дважды.)

В 8 классе эта задача решается, на наш взгляд, устно. Для этого достаточно использовать *прием равнобедренного* *треугольника.* Отметим основные вехи *первой модификации* этого приема:

изображается равнобедренный (но не равносторонний) треугольник ABC с основанием AC (иногда этот треугольник имеет конкретную величину угла ABC);

проводится отрезок AD ($D \in BC$). Точка D либо основание высоты AD, либо такая, что треугольники ADB и ADC оба равнобедренные. Причем если для треугольника ABD только $AD = DB$, то для треугольника ADC таких возможностей две: $AD = AC$ или $AC = CD$;

вычисляются величины всех углов, получившихся на рисунке;

рассматривая равенство $BC = BD + DC$, определяются длины этих трех отрезков, причем один из них можно принять за единичный.

Итак, приводим решение.

Рассмотрим треугольник ABC ($AB = BC$), точку D ($D \in BC$ и $AD = BD = AC$) и определим величины углов с вершинами в точках A, B, C и D.

Если $\angle ABC = x$, то $\angle BAD = x$, $\angle ADC = 2x$, $\angle ACD = 2x$, $\angle DAC = 2x$, $\angle ADB = 3x$. Величины этих углов получены по свойству углов равнобедренного треугольника и по свойству внешнего угла треугольника.

Суммы внутренних углов треугольников ABD, ACD и ABC равны по $5x$, т. е. $x = 36°$. Итак, $\angle ABC = 36°$ и $\angle ADC = 72°$. Так как $D \in BC$, то $BC = BD + DC$. Если $BD = 1$, то $AB = 2\cos 36°$ и $CD = 2\cos 72°$. Так как $AB = BC$, то $2\cos 36° = 1 + 2\cos 72°$. Значит, $\cos 36° - \cos 72° = \frac{1}{2}$.

Рисунок 2.3 и письменное решение, на наш взгляд, достаточно утомительны. Поэтому считаем целесообразным использовать аналогичную форму записи решения только при итоговом контроле знаний (например, на экзамене).

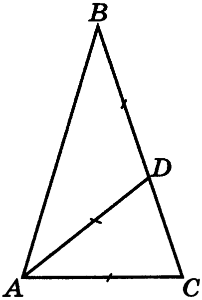


Рис. 2.3

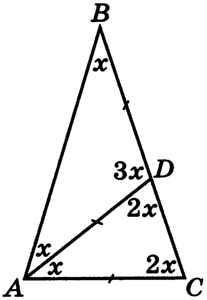


Рис. 2.4

В текущей работе рисунок 2.4 (п. 1 устно) и краткая запись (п. 2) делают решение практически мгновенным:

① Так как треугольники ABD, CAD и ABC равнобедренные, то $5x = 180°$, т. е. $x = 36°$.

② $BC = BD + DC$, $2\cos 36° = 1 + 2\cos 72°$,

$\cos 36° - \cos 72° = \frac{1}{2}$. Тождество доказано.

4. Докажите тождество

$$\frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ} = \frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ} + \frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}.$$

Доказательство. Если десятиклассники будут выполнять это задание «в лоб», т. е. преобразуя *правую часть до левой части*, то можно предположить, что значительное число учащихся с работой могут не справиться, так как здесь много вычислений.

Если часть десятиклассников заметят, что $\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ = 3\cdot\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ$ и $\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ = 2\cdot\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ$, но не обратят внимание на равенство $\sin 3\alpha = \sin 4\alpha$ $\left(\alpha = \left(25\frac{5}{7}\right)^\circ\right)$, то они могут попасть в собственный капкан, так как

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} = \frac{2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha}$$

и конца работы по преобразованию этого выражения до выражения $\frac{1}{\sin\alpha}$ не видно (если вообще возможно преобразование без обратной замены α на $\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ$).

Если часть десятиклассников, приученных решать *любую* математическую задачу в два этапа, установят на логико-аналитическом этапе все связи между объектами и между величинами, то операциональный этап быстро выполним:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha} = \frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} = \frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha\sin 3\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

В 8 классе эта трудная задача тоже выполнима.

① *Устно* (см. рис. 2.5). Так как треугольники ABD, ADC и ABC равнобедренные, то $7x = 180°$, т. е. $x = \left(25\frac{5}{7}\right)^\circ$.

② $BC = BD + DC$.

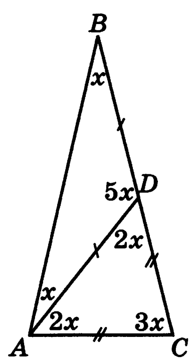


Рис. 2.5

Если длина общей высоты, проведенной из вершины A в треугольниках ABD, ADC и ABC, равна 1 ($H \in BC$, $AH \perp BC$, $AH = 1$), то:

из $\triangle ABH$ ($AH \perp BH$) $BC = AB = \dfrac{AH}{\sin\angle ABH} = \dfrac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ}$;

из $\triangle ADH$ ($AH \perp DH$) $BD = AD = \dfrac{AH}{\sin\angle ADH} = \dfrac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ}$;

из $\triangle ACH$ ($AH \perp CH$) $DC = AC = \dfrac{AH}{\sin\angle ACH} = \dfrac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}$.

Значит, $\dfrac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ} = \dfrac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ} + \dfrac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}$, что и требовалось доказать.

5. Вычислите $\sin 18^\circ$.

Решение. В 10 классе это задание можно выполнить, например, так:

$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$ или

$\sin 36^\circ = \cos(18^\circ + 36^\circ)$ или

$2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = \cos 18^\circ \cos 36^\circ - \sin 18^\circ \sin 36^\circ$ или

$2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = \cos 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) - 2\sin^2 18^\circ \cos 18^\circ$.

Так как $0 < \cos 18^\circ < 1$, то $2\sin 18^\circ = 1 - 4\sin^2 18^\circ$.

Если $\sin 18^\circ = x$, то $4x^2 + 2x - 1 = 0$ при $0 < x < \frac{1}{2}$.

Отсюда $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

В 8 классе вычисление $\sin 18^\circ$ тоже возможно.

В задаче 3 (см. рис. 2.3) были определены величины углов с вершинами в точках A, B, C и D.

Треугольники ABC и CAD подобны, так как оба они равнобедренные с общим углом при основаниях ($\angle ACB = \angle ACD$). Значит, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{AC}$, т. е. $AC^2 = AB \cdot CD$.

Если $AC = a$ и $AB = b$ ($a < b$, так как $\angle ABC = 36^\circ$ и $\angle ACB = 72^\circ$), то $CD = b - a$ и $a^2 = b^2 - ab$*. Отсюда $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Это число называют *золотым сечением* или *числом Фидия* (Фидий — отец Архимеда).

Золотое сечение $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$ считается эталоном красоты в архитектуре древних строителей.

---

* Уравнение $a^2 = b^2 - ab$ можно решить как квадратное, например, относительно a с параметром b, а можно решить как однородное.

Золотое сечение может быть выражено дробями $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \ldots$, где числители — числа Фибоначчи. О золотом сечении написано много книг. О его применении в геометрии указывал еще Евклид, об использовании в искусстве — Альбрехт Дюрер и Леонардо да Винчи, о влиянии на астрономические расчеты — Иоганн Кеплер. Закон золотого сечения обнаружен в формах живой природы как закон единообразного роста. Например, этот закон проявляется и в расположении семян подсолнуха или сосновой шишки, и в распределении листьев и хвои на деревьях, и в расположении стеблей, и в членениях тела человека. Исследователи поэзии А. С. Пушкина, Шота Руставели и М. Ю. Лермонтова обнаружили, что золотое сечение указывает в их стихах на кульминацию и главную мысль художественной формы.

Подробнее о золотом сечении советуем прочитать в книге А. В. Волошинова «Математика и искусство», а теперь вернемся к вычислению $\sin 18°$, имеющему пропорциональную связь с золотым числом.

Так как $\sin 18° = \cos 72°$, а $\cos 72° = \frac{\frac{1}{2}CD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b}$, то $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Замечание. Одним из расширений задачи 5 может служить задание: *вычислите* $\cos 36°$. Решение см. по рисунку 2.3:

$$\cos 36° = \frac{\frac{1}{2}AB}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

По формулам эта задача решается значительно дольше.

Ответ. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Задачей 5 мы завершаем иллюстрацию *первой модификации приема равнобедренного треугольника.*

<u>6.</u> Вычислите $\cos\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ - \cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ + \cos\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ$.

Решение. Эта задача не является сходной с задачей 4, так как для ее решения потребуется *новая идеология решения* (у нас: *вторая модификация приема равнобедренного треугольника*). Однако прямое описание действия менее полезно, на наш взгляд, чем исследовательская деятельность на логико-аналитическом этапе решения задачи.

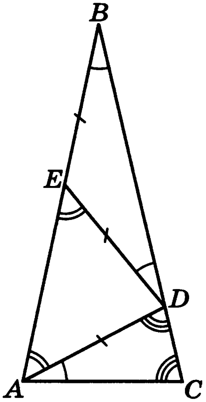


Рис. 2.6

Итак, требуется вычислить значение Ф, равное

$$\cos\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ - \cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ + \cos\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ.$$

То есть Ф неизвестно, если

$$\cos\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ + \cos\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ =$$
$$= \Phi + \cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ.$$

Значит, одной вспомогательной точки D ($D \in BC$) в треугольнике ABC мало, так как тогда имеем $BC = BD + CD$. Поэтому *должна быть еще одна вспомогательная точка* (пусть точка E), *лежащая теперь на AB*. Тогда $BD + CD = AE + BE$.

Теперь очевидно отличие второй модификации приема от первой.

Вернемся к решению задачи 6 (рис. 2.6).

Выберем $D \in BC$ и $E \in AB$ так, чтобы $AD = DE = BE$ в равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) с углом при вершине B, равным $\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ$. Тогда $\angle EDB = \left(25\frac{5}{7}\right)^\circ$, $\angle AED = \angle EAD = \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ$, $\angle BAC = \angle BCA = \left(77\frac{1}{7}\right)^\circ$, $\angle DAC = \left(25\frac{5}{7}\right)^\circ$ и $\angle ADC = \left(77\frac{1}{7}\right)^\circ$*.

Если $BE = 1$, то:

$$\text{из } \triangle BDE \quad BD = 2\cos\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ;$$

$$\text{из } \triangle ADE \quad AE = 2\cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ;$$

$$\text{из } \triangle CAD \quad CD = 2\cos\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ.$$

Значит, $2\cos\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ + 2\cos\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ = 2\cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ + 1.$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

---

* При вычислении углов оказалось, что если $\triangle ABC$ равнобедренный с $\angle ABC = \left(25\frac{3}{7}\right)^\circ$ и $AD = DE = BE$ ($D \in BC$, $E \in AB$), то и $\triangle CAD$ тоже равнобедренный ($AC = AD$) и подобен $\triangle ABC$.

7. Вычислите $\cos\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ\cdot\cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ\cdot\cos\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ$.

Решение. Задача 7 является расширением задачи 6. Здесь также по рисунку 2.6 определяем величины углов. Однако завершить решение без теоремы синусов в 8 классе сложно. Зато в 9 классе, на наш взгляд, задача 7 — обычное, рядовое упражнение.

Итак, в задаче 6 получили:

$$\text{из } \triangle BDE \quad \cos\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ=\frac{1}{2}BD;$$

$$\text{из } \triangle ADE \quad \cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ=\frac{1}{2}AE;$$

$$\text{из } \triangle CAD \quad \cos\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ=\frac{1}{2}CD.$$

Применяя теорему синусов, получим:

$$\text{в } \triangle ADC \quad \frac{AC}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}=\frac{CD}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ},\ \text{т. е. } CD=\frac{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ};$$

$$\text{в } \triangle AED \quad \frac{AD}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ}=\frac{AE}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ},\ \text{т. е. } AE=\frac{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ};$$

$$\text{в } \triangle BDE \quad \frac{DE}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ}=\frac{BD}{\sin 5\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ},\ \text{т. е. } BD=\frac{\sin 5\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ}.$$

А теперь

$$\cos\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ\cdot\cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ\cdot\cos\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ=\frac{1}{2}BD\cdot\frac{1}{2}AE\cdot\frac{1}{2}CD=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 5\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ\cdot\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ\cdot\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ\cdot\sin 2\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ\cdot\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ}=\frac{1}{8},$$

так как синусы смежных углов BED и AED равны

$$\left(\sin 5\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ=\sin 2\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ\right).$$

Ответ. $\frac{1}{8}$.

8. Вычислите $\cos\left(13\frac{11}{13}\right)^\circ - \cos\left(27\frac{9}{13}\right)^\circ + \cos\left(41\frac{7}{13}\right)^\circ - \cos\left(55\frac{5}{13}\right)^\circ + \cos\left(69\frac{3}{13}\right)^\circ - \cos\left(83\frac{1}{13}\right)^\circ$.

Решение. Эта задача — аналог задачи 6 — способствует обобщению модификаций приема равнобедренного треугольника.

Выполняя рисунок к задаче, приходим к выводу: *количество вспомогательных точек на боковых сторонах равнобедренного треугольника ABC варьируется.* В задаче 8 таких точек 5, так как в этой задаче явно указаны 6 объектов и еще один (значение выражения) косвенно. Читатель легко завершит решение и получит в ответе число $\frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Однако не следует считать, что все тригонометрические задания легче решать приемом равнобедренного треугольника. Бывает, что формулы приводят к ответу быстрее. Например, в следующем задании 9.

9. Проверьте равенство $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ = \cos 20^\circ$.

Решение. Для любого ученика 10 класса эта задача на прямое применение формулы. Действительно, $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ = 2\cos 60^\circ \cdot \cos 20^\circ = \cos 20^\circ$.

Но в 8 классе задание совсем не рядовое, так как уже и вторая модификация приема не срабатывает.

Рассмотрим на рисунке 2.7 равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом ABC, равным 20°.

Пусть $D \in BC$, $E \in AB$, $F \in BC$ и $BF = FE = ED = DA$.

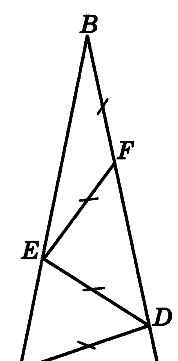


Рис. 2.7

Величины всех углов легко находятся (см. предыдущие задачи). При этом окажется, что $\triangle CAD$ равнобедренный ($AD = AC$) и подобен $\triangle ABC$. Однако это не главное.

Главное: $BF + FD + DC = BE + AE$ и при $BF = 1$ (выбор единичного отрезка произволен) $BE = 2\cos 20^\circ$, $AE = 1$, $FD = 2\cos 40^\circ$, $DC = 2\cos 80^\circ$. Отсюда

$$1 + 2\cos 40^\circ + 2\cos 80^\circ = 2\cos 20^\circ + 1,$$

т. е. равенство $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ = \cos 20^\circ$ истинно.

Некоторые задания геометрически решать выгоднее другими приемами. Например, задание 10.

10. Вычислите $\operatorname{ctg} 10^\circ - 4\cos 10^\circ$.

Решение. Так как в этой задаче градусная величина только одна, то совсем не очевидно применение приема равнобедренного треугольника. Но у нас есть в запасе еще один вид треугольников, который также удобно использовать при выполнении тригонометрических заданий.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle ABC = 10°$, $\angle ACB = 90°$, $D \in BC$, $E \in AB$ и $AD = DE = BE$, AC — единичный отрезок (рис. 2.8).

Определив величины углов, замечаем: $BC = \operatorname{ctg} 10°$, $BD = 4 \cos 10°$, $CD = \operatorname{tg} 60°$.

Так как $BC = BD + DC$, то

$$\operatorname{ctg} 10° = 4 \cos 10° + \operatorname{tg} 60°.$$

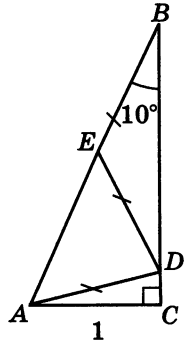


Рис. 2.8

Ответ. $\sqrt{3}$.

Замечание. Попутно можно увидеть, что $\frac{1}{\sin 10°} - 4 \cos 20° = 2$, так как $\frac{1}{\sin 10°} = AB$, $4 \cos 20° = AE$, а $BE = 2$.

Как мы уже отмечали выше, многие тригонометрические задания целесообразно выполнять по формулам. Эти формулы как правила действий появляются только в 10 классе, и их слишком много. Но их можно получать *для острых углов* еще в 8—9 классах. См., например, задания 11—17.

<u>11.</u> Докажите, что $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (*основная тригонометрическая единица*)*.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) с гипотенузой, равной 1 (рис. 2.9). Тогда $BC = \sin \alpha$ и $AC = \cos \alpha$. По теореме Пифагора $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

<u>12.</u> Докажите, что $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Доказательство. Если на рисунке 2.9 $\triangle ABC$ имеет катет AC, равный 1, то $BC = \operatorname{tg} \alpha$ и $AB = \frac{1}{\cos \alpha}$. Значит, по теореме Пифагора $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

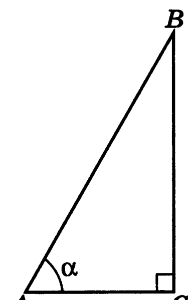


Рис. 2.9

<u>13.</u> Докажите, что $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Доказательство. Если на рисунке 2.9 $\triangle ABC$ имеет катет BC, равный 1, то $AC = \operatorname{ctg} \alpha$ и $AB = \frac{1}{\sin \alpha}$. И здесь помогает теорема Пифагора: $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

* Здесь и далее в скобках дано традиционное название формулы.

14. Докажите, что $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ (*формула синуса двойного угла*).

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный $\triangle ABC$ ($AB = BC = 1$) с углом ABC, равным 2α (рис. 2.10), и высотами AD и BE.

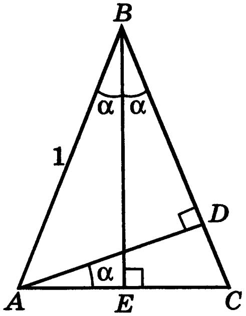


Рис. 2.10

По рисунку $AD = \sin 2\alpha$, $AE = EC = \sin \alpha$, $BE = \cos \alpha$.

Так как треугольники ABE и CAD подобны, то $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{AD}$, т. е.

$$\frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Значит, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

15. Докажите, что

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

(одна из *формул понижения степени*).

Доказательство. По рисунку 2.10 $AE = EC = \sin \alpha$, $BD = \cos 2\alpha$, $CD = 1 - \cos 2\alpha$. Из подобия треугольников ABE и CAD имеем $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{CD}$, т. е. $\frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos 2\alpha}$. Значит,

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha.$$

16. Докажите, что $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ (одна из *формул тангенса половинного угла*).

Доказательство. По рисунку 2.10 $AD = \sin 2\alpha$, $BD = \cos 2\alpha$, $CD = 1 - \cos 2\alpha$. Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AD}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

17. Докажите, что $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ (одна из *формул сложения*).

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $BD \perp AC$, $\angle ABD = \alpha$ и $\angle CBD = \beta$. Точка D — внутренняя точка отрезка AC, так как по условию α и β — острые углы (рис. 2.11). Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $BD = h$.

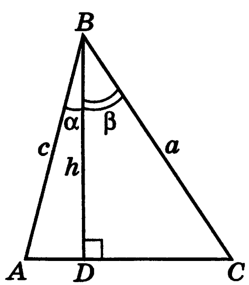


Рис. 2.11

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin(\alpha + \beta),$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}.$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} ch \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} c \sin \alpha \cdot a \cos \beta =$$

$$= \frac{1}{2} ac \sin \alpha \cos \beta.$$

$$S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2}\, ah \sin \beta = \frac{1}{2}\, a \sin \beta \cdot c \cos \alpha = \frac{1}{2}\, ac \cos \alpha \sin \beta.$$

Значит, $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Заметьте, что если использовать эту формулу и основную тригонометрическую единицу $\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1$, то, сделав ряд преобразований, можно получить $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

18. Докажите: если $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geqslant 2$, то

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leqslant \sqrt{5}.$$

Доказательство. Пусть $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > \sqrt{5}$.

Рассмотрим $\vec{a}(\cos \alpha; \sin \alpha)$, $\vec{b}(\cos \beta; \sin \beta)$, $\vec{c}(\cos \gamma; \sin \gamma)$. Эти векторы единичные, т. е. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Их сумма, т. е. вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, имеет координаты

$$(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma;\ \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2.$$

По условию $(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 \geqslant 2^2$.

Мы допустили: $(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 > (\sqrt{5})^2$.

Значит, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \geqslant 2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9$. (1)

Так как $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$, то

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \leqslant (1 + 1 + 1)^2 = 9. \quad (2)$$

Сравнивая два неравенства (1) и (2), получаем $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = 9$.

Тогда имеем:

$$(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 = 9 - (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 \leqslant 9 - 2^2 = 5.$$

Значит, $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leqslant \sqrt{5}$.

19*. Вычислите $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

Решение. Решим эту задачу также без рисунка, но мысленно представив себе правильный семиугольник $A_1A_2 \ldots A_7$. Центральный угол такого многоугольника равен $\frac{2\pi}{7}$.

Пусть радиус описанной окружности около нашего семиугольника равен 1 ($R = 1$), а ее центр обозначен буквой O. Тогда $|\overrightarrow{OA_i}| = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, 7$). Из учебников геометрии известно: $\sum\limits_{1}^{7} \overrightarrow{OA}_i = 0$*, значит, $(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_7})^2 = 0$.

---

* $\sum\limits_{1}^{n}$ — знак суммы n слагаемых.

Подсчитав скалярный квадрат, получим

$$7+2\left(6\cos\frac{2\pi}{7}+5\cos\frac{4\pi}{7}+4\cos\frac{6\pi}{7}+\right.$$
$$\left.+3\cos\frac{8\pi}{7}+2\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}\right)=0.$$

Так как $\cos\frac{2\pi}{7}=\cos\frac{12\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}=\cos\frac{10\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}=$ $=\cos\frac{8\pi}{7}$, то имеем $7+2\left(7\cos\frac{2\pi}{7}+7\cos\frac{4\pi}{7}+7\cos\frac{6\pi}{7}\right)=0$, а отсюда $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

Ответ. $-\frac{1}{2}$.

Замечание. Если заменить $\frac{2\pi}{7}$ на $\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ$, $\frac{4\pi}{7}$ на $\left(102\frac{6}{7}\right)^\circ$ и $\frac{6\pi}{7}$ на $\left(154\frac{2}{7}\right)^\circ$, то тогда задача 19 будет *похожей* на задачу 6, а именно: *вычислите*

$$\cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ+\cos\left(102\frac{6}{7}\right)^\circ+\cos\left(154\frac{2}{7}\right)^\circ.$$

Эта же сумма равна

$$\cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ-\cos\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ-\cos\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ.$$

Так как в задаче 6

$$\cos\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ-\cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ+\cos\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ=\frac{1}{2},$$

то для задачи 19 ответ почти очевиден.

20*. Каким должен быть острый угол x, если $\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4$?

Решение. Рассмотрим рисунок 2.12. $AC=2\sqrt{3}, CD=\sqrt{3}$, $CB=2$. Тогда $AD=\sqrt{15-12\cos x}$ и $BD=\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}$ по теореме косинусов, а $AB=4$ по теореме Пифагора. Значит, $D\in AB$ (рис. 2.13).

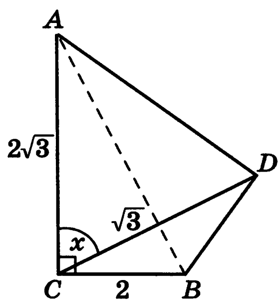


Рис. 2.12

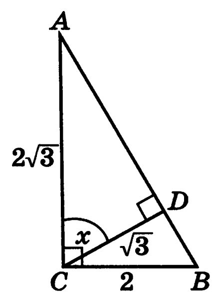


Рис. 2.13

На рисунке 2.13 угол ADC указан как прямой. Убедимся, что это не случайность.

Так как $\triangle ABC$ прямоугольный и синус угла A равен $\frac{1}{2}$, то $\angle A = 30°$.

По теореме косинусов из треугольника ACD следует, что $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos 30°$, т. е. $3 = 12 + y^2 - 6y$, где буквой y обозначена длина стороны AD. Имеем $y^2 - 6y + 9 = 0$, $y = 3$.

Итак, $AD = 3$. Так как $3^2 + (\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2$, то в треугольнике ACD $\angle ADC = 90°$. Тогда $x = 60°$.

Ответ. $60°$.

Замечание. 1) После того как было доказано, что $D \in AB$, можно было составить уравнение

$$2\sqrt{3} = 3\sin x + \sqrt{3}\cos x,$$

так как $2\sqrt{3} = S_{\triangle ABC}$, $3\sin x = S_{\triangle ACD}$ и $\sqrt{3}\sin(90° - x) = S_{\triangle BCD}$. Из этого уравнения получаем

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2,\ \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1,$$

$$\sin(30° + x) = 1,\ \ x = 60°.$$

2) Традиционное решение иррационального тригонометрического уравнения $\sqrt{15 - 12\cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x} = 4$ для $0 < x < \frac{\pi}{2}$ окажется более длинным и займет больше времени.

<u>21.</u> Докажите, что сумма синусов внутренних углов выпуклого n-угольника меньше чем 6,29.

<u>**Доказательство.**</u> На рисунке 2.14 видно, что длина дуги AB больше, чем BC. Так как длина BC равна $\sin\alpha$, а длина дуги AB соответственно равна α, то остальные шаги решения очевидны:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n = \sin(\pi - \alpha_1) + \sin(\pi - \alpha_2) + \ldots$$
$$\ldots + \sin(\pi - \alpha_n) \leqslant \pi - \alpha_1 + \pi - \alpha_2 + \ldots + \pi - \alpha_n =$$
$$= \pi n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \pi n - (n-2)\pi = 2\pi \approx 6{,}28.$$

Итак, $\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \leqslant 2\pi < 6{,}29$, $n \in N$ и $n \geqslant 3$.

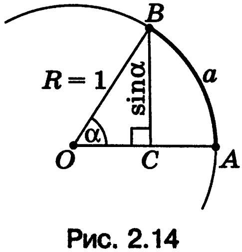


Рис. 2.14

22*. Вычислите $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\arccos\frac{3}{5}$ (для учащихся 8—9 классов это задание выглядит так: вычислите сумму острых углов α и β, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ и $\cos\beta=\frac{3}{5}$).

Решение. См. рис. 2.15.

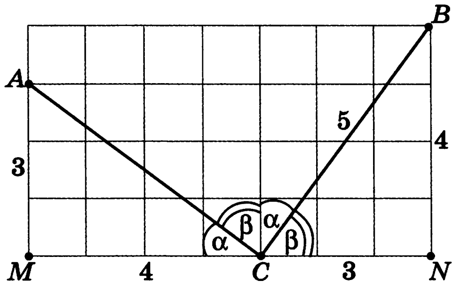


Рис. 2.15

Ответ. 90°.

Замечание. В Древней Индии в математических трактатах, доказывая теорему или решая задачу, часто приводили только рисунок, сопровождая его одним словом *Смотри*.

23. Докажите, что

$2\operatorname{arcctg}5-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}=0$ (для учащихся 8—9 классов это задание с таким условием: докажите, что для острых углов α и β верно $2\alpha=\beta$, если $\operatorname{ctg}\alpha=5$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{12}$).

Доказательство. *Смотри* $2\alpha=\beta$ (рис. 2.16).

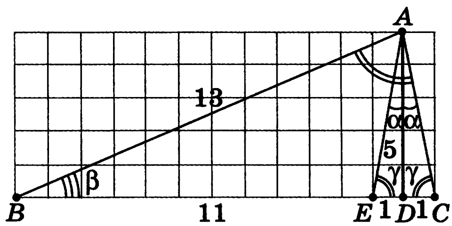
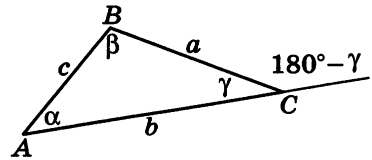


Рис. 2.16

Следующий этюд мы полностью посвятим заданиям с обратными тригонометрическими функциями.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК № 2

1. Треугольник



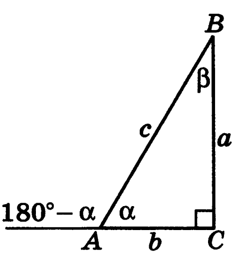
1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
2) Сумма смежных углов равна 180°.
3) Теорема синусов. В $\triangle ABC$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$
R — радиус описанной окружности.
4) Теорема косинусов. В $\triangle ABC$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
5) Площадь треугольника.
$$S_\triangle = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c;$$
$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta;$$
$S_\triangle = \dfrac{abc}{4R}$, R — радиус описанной окружности;

$S_\triangle = pr$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, r — радиус вписанной окружности;
$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

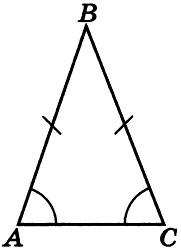
2. Прямоугольный треугольник

1) $\alpha + \beta = 90°$.
2) $\sin\alpha = \cos\beta = \dfrac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{a}{b}$,

$\cos\alpha = \sin\beta = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$.
3) Если углы дополняют друг друга до 90°, то синус (тангенс) одного равен косинусу (котангенсу) другого, т. е.
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$,
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.
4) Синусы смежных углов равны, т. е.
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha.$$
5) Косинусы смежных углов имеют равные модули и разные знаки, т. е.
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$
6) Тангенс угла — это отношение синуса угла к его косинусу, а котангенс наоборот, т. е.
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$
7) Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.



3. Равнобедренный треугольник

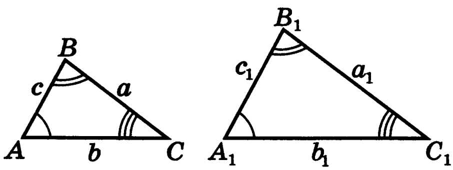


$$AB = BC,\ \angle A = \angle C.$$

Основание равнобедренного треугольника равно удвоенному произведению его боковой стороны и косинуса прилежащего к нему угла, т. е.

$$AC = 2AB\cos A = 2BC\cos C.$$

4. Подобные треугольники



$$a_1 = ka,\ \angle A_1 = \angle A;$$
$$b_1 = kb,\ \angle B_1 = \angle B;$$
$$c_1 = kc,\ \angle C_1 = \angle C.$$

5. Некоторые значения

1)

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Шутка:

Если

№	1	2	3
α	30°	45°	60°

, то $\sin\alpha = \frac{\sqrt{№}}{2}$.

Шутка:

Вот и Нина и Анюта прибежали,
Пи число узнать они желали.

То есть число букв в слове соответствует цифре ($\pi \approx 3{,}1415925636$).

Стишок:

Гордый Рим трубил победу над твердыней Сиракуз.
Но трудами Архимеда много больше я горжусь.
Чтобы нам не ошибиться и окружность верно счесть...
Три, четырнадцать, пятнадцать, девяносто два и шесть.

То есть $\pi \approx 3{,}1415926$, хотя сам Архимед считал, что $\pi = \frac{22}{7} \approx 3{,}14$.

2) $\pi = 3{,}14159256358979323846264 3...$. Сегодня известно сто тысяч десятичных знаков.

Учись, мой сын: наука сокращает
Нам опыты быстротекущей жизни.
А. Пушкин

УПРАЖНЕНИЯ

Решите геометрически и по формулам.

1. Вычислите:

а) $\frac{1}{\cos 20^\circ} - 4\sin 50^\circ$;

б) $\frac{2}{\sin 50^\circ} + 8\sin 10^\circ$;

в) $\frac{1}{\cos 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{3\cos 40^\circ}$;

г) $\frac{\sqrt{3}}{3\cos 20^\circ} - \frac{1}{\sin 40^\circ}$;

д) $\frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{3\cos 20^\circ}$;

е) $\frac{\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ}$.

2. Проверьте равенство:

а) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$;

б) $\operatorname{ctg} 70^\circ + 4\cos 70^\circ = \sqrt{3}$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} 20^\circ - 4\cos 20^\circ = 1$;

г) $\frac{\sqrt{3}}{\cos 20^\circ} - 4\cos 40^\circ = 2$;

д) $\frac{1}{\cos 20^\circ} - 1 = \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ$;

е) $\operatorname{ctg} 56^\circ + \operatorname{tg} 28^\circ = \frac{1}{\cos 34^\circ}$;

ж) $2\operatorname{ctg} 72^\circ + \frac{1}{\sin 72^\circ} = \frac{1}{\sin 36^\circ}$;

з) $\frac{\cos 54^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. Известно, что синус острого угла α равен $\frac{5}{13}$. Вычислите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

4. Известно, что косинус острого угла β равен $\frac{40}{41}$. Вычислите $\sin\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$.

5. Известно, что тангенс острого угла γ равен $\frac{8}{15}$. Вычислите $\sin\gamma$, $\operatorname{tg}\gamma$, $\operatorname{ctg}\gamma$.

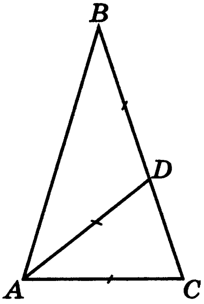
6. Известно, что котангенс острого угла φ равен $\frac{7}{24}$. Вычислите $\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$.

7. Известно, что для острых углов α и β $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta = 2{,}4$. Вычислите $\sin(\alpha+\beta)$.

8. Докажите, что $\sin 36^\circ + \cos 18^\circ = \operatorname{ctg} 18^\circ$.

9. Докажите, что $\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{4}$.

10. Докажите, что $\sin 54° \cdot \sin 18° = \frac{1}{4}$.



11. Используя рисунок, придумайте условие:

а) трех-четырех упражнений на вычисление значений тригонометрических выражений;

б) трех-четырех упражнений на проверку равенства тригонометрических выражений.

Например: а) Вычислите $\cos 72° \cos 36°$.

б) Проверьте равенство

$$1 + 2\cos 36° = 4\cos^2 36°.$$

12. Докажите, что

$$\arccos\frac{15}{17} - 2\,\mathrm{arcctg}\,4 = 0$$

(для учащихся 8—9 классов это задание с таким условием: докажите, что для острых углов α и β верно $\alpha = 2\beta$, если $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ и $\mathrm{ctg}\,\beta = 4$).

13. Докажите, что

$$\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} + \mathrm{arctg}\,4 + \arcsin\frac{8}{17} = 180°$$

(для учащихся 8—9 классов задание выглядит так: докажите, что существует треугольник с углами α, β и γ, если $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\mathrm{tg}\,\beta = 4$, $\sin\gamma = \frac{8}{17}$. Определите вид этого треугольника).

Если Бог есть и если он действительно создал Землю, то, как нам совершенно известно, создал он ее по Эвклидовой геометрии.

Ф. Достоевский

Этюд 3. ОБ АРКУСАХ

Как мы и обещали, дорогие читатели, здесь будем рассматривать задачи, в условия которых входят выражения, записанные в виде суммы (разности) обратных тригонометрических функций, или, как их еще называют, *аркусов*.

Решение таких задач по формулам требует значительных усилий при вычислениях. Этих неудобств можно избежать, если использовать геометрические приемы.

Для учащихся 8—9 классов приведенные ниже задачи потребуют переформулировки условий. Сделать это нетрудно *.

1. Вычислите

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3.$$

Решение. Используя клеточный фон (рис. 3.1), это задание выполним практически устно.

$\operatorname{arctg} 3 = \angle BAM$,

$\operatorname{arctg} 2 = \angle CAN$,

$\operatorname{arctg} 1 = \angle BAC$ ($\angle BAC$ — острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника ABC).

Итак, $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$.

Ответ. π.

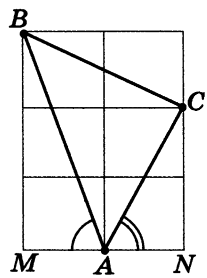


Рис. 3.1

2. Вычислите $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arcctg} 5$.

Решение. Рисунок 3.2 дает ответ: эта сумма равна $\frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \angle CAD$, $\operatorname{arcctg} 5 = \angle BAD$, $\angle BAC$ — острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника ABC.

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

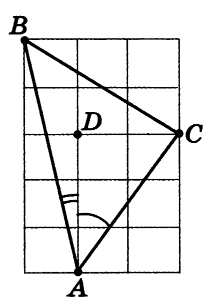


Рис. 3.2

* См. этюд 2, № 22, 23.

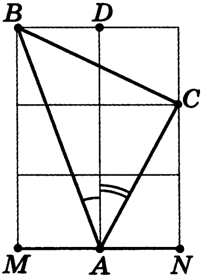


Рис. 3.3

3. Вычислите

$$\cos(\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arctg} 0{,}5).$$

Решение. На рисунке 3.3 на клеточном фоне построен треугольник ABC. При этом $\operatorname{ctg} \angle DAB = 3$ и $\operatorname{tg} \angle DAC = 0{,}5$.

Треугольник ABC — равнобедренный с прямым углом ACB. Значит,

$$\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arctg} 0{,}5 = \frac{\pi}{4},$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arctg} 0{,}5) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

Решение. Так как $\frac{2}{\sqrt{5}} > 0$, то можно считать, что $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$ — это угол прямоугольного треугольника, у которого отношение катетов равно 1 : 2. Тогда величину этого угла можно рассматривать как $\operatorname{arctg} 2$. Аналогично рассуждая, получим $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} = \operatorname{arctg} 3$. Далее, по рисунку 3.3 $\angle MAB = \operatorname{arctg} 3$ и $\angle NAC = \operatorname{arctg} 2$, а их сумма равна $\pi - \frac{\pi}{4}$.

Итак, $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Ответ. -1.

5. Похожим приемом достаточно быстро находятся значения выражений:

Серия 1. а) $\operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$;

б) $\operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$;

в) $\operatorname{arctg} 9 + \operatorname{arctg}\frac{5}{4}$.

Серия 2. а) $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

б) $\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$;

в) $\operatorname{arctg} 11 - \operatorname{arctg}\frac{5}{6}$.

Серия 3. а) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} - \operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg} 1$;

в) $\operatorname{arctg} 0{,}9 + \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 19$.

Однако если внимательно проанализировать задания всех трех серий, то можно сформулировать *обобщенную задачу: определите область изменения функции* $f(x) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg}(1 + 2x)$.

Область определения этой функции — все действительные числа, кроме нуля, т. е. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Для нахождения области изменения $E(f)$ рассмотрим пять случаев.

1) $\begin{cases} 1 + \frac{1}{x} < 0 \\ 1 + 2x < 0. \end{cases}$

В этом случае $-1 < x < -\frac{1}{2}$ и $A(x) < 0$, где

$$A(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg}(1 + 2x).$$

$\operatorname{tg} A(x) = \dfrac{1 + \frac{1}{x} + 1 + 2x}{1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 + 2x)} = \dfrac{2 + 2x + \frac{1}{x}}{-2 - 2x - \frac{1}{x}} = -1$, так как $2 + 2x + \frac{1}{x} < 0$ для всех значений x из промежутка $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

$A(x) = -\frac{\pi}{4}$, $f(x) = \operatorname{arctg} 1 + A(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$.

2) $\begin{cases} 1 + \frac{1}{x} < 0 \\ 1 + 2x > 0. \end{cases}$

В этом случае $-\frac{1}{2} < x < 0$ и $B(x) > 0$, где $B(x) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(1 + 2x)$. $\operatorname{tg} B(x) = \dfrac{1 + 1 + 2x}{1 - 1 \cdot (1 + 2x)} = \dfrac{2 + 2x}{-2x} = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ и $B(x) = -\operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Значит, $f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + B(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$.

3) $\begin{cases} 1 + \frac{1}{x} > 0 \\ 1 + 2x < 0. \end{cases}$

В этом случае $x < -1$ и $C(x) > 0$, где $C(x) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

$$\operatorname{tg} C(x) = \frac{1+1+\frac{1}{x}}{1-1\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -(1+2x),$$

$$C(x) = -\operatorname{arctg}(1+2x).$$

Значит, $f(x) = C(x) + \operatorname{arctg}(1+2x) = -\operatorname{arctg}(1+2x) + \operatorname{arctg}(1+2x) = 0$.

4) $f(-1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{-1}\right) + \operatorname{arctg}(1+2\cdot(-1)) = 0.$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right) + \operatorname{arctg}\left(1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0.$$

Итак, при $x<0$ $f(x)=0$.

5) $\begin{cases} 1+\frac{1}{x} > 0 \\ 1+2x > 0. \end{cases}$

В случае $x>0$ и $D(x)>0$, где $D(x) = \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg}(1+2x)$, $\operatorname{tg} D(x) = \dfrac{1+\frac{1}{x}+1+2x}{1-\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+2x)} = \dfrac{2+2x+\frac{1}{x}}{-2-2x-\frac{1}{x}} = -1$, так как $2+2x+\frac{1}{x}>0$ для всех значений x из промежутка $(0; +\infty)$.

$D(x) = \frac{3\pi}{4}$, $f(x) = \operatorname{arctg} 1 + D(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi.$

Итак, при $x>0$ $f(x)=\pi$.

Теперь нетрудно записать область изменения заданной функции:

$$E(f) = \{0; \pi\}.$$

После этого все задания серий 1—3 выполняются мгновенно:

для заданий **серии 1** ответ $\frac{3\pi}{4}$,

для заданий **серии 2** ответ $\frac{\pi}{4}$,

для задания **«а» серии 3** ответ π,

для заданий **«б»** и **«в» серии 3** ответ 0.

<u>6.</u> Найдем значения $f(5)$ и $f(-5)$ тремя приемами. Каждый читатель сам расставит вкусовые акценты, знакомясь с ними.

$f(5)$

А. Так как $5 > 0$, то $f(5) =$
$= \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{6}{5} + \operatorname{arctg} 11 = \pi$.

Б. Смотри рисунок 3.4.

В. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$\operatorname{arctg} 11 > 0,\ \operatorname{arctg} \frac{6}{5} > 0.$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 11) = \frac{1+11}{1-1\cdot 11} = -\frac{6}{5},$$

значит,

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 11 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{6}{5}$$

$$\text{и } f(5) = \operatorname{arctg} \frac{6}{5} + \pi - \operatorname{arctg} \frac{6}{5} = \pi.$$

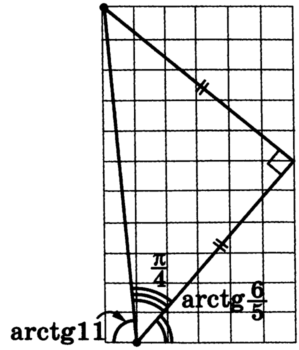


Рис. 3.4

$f(-5)$

А. Так как $-5 < 0$, то $f(-5) =$
$= \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{4}{5} - \operatorname{arctg} 9 = 0$.

Б. Смотри рисунок 3.5.

$$\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} \frac{4}{5} = \frac{\pi}{4},$$

$$f(-5) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0.$$

В. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$\operatorname{arctg} 9 > \operatorname{arctg} \frac{4}{5} > 0.$$

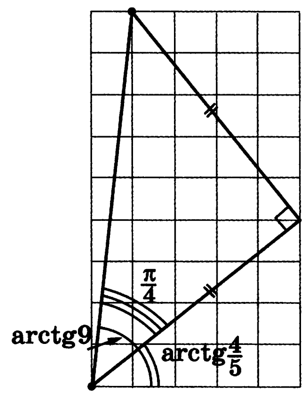


Рис. 3.5

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} \frac{4}{5}\right) = \frac{9 - \frac{4}{5}}{1 + 9\cdot\frac{4}{5}} = 1, \quad \text{значит,}$$

$$\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} \frac{4}{5} = \frac{\pi}{4} \quad \text{и } f(-5) = \frac{\pi}{4} - \left(\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} \frac{4}{5}\right) = 0.$$

7. Вычислите $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right)$.

Решение. Если использовать понятия косинуса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника, теорему Пифагора и свойство биссектрисы угла треугольника, то задача решается мгновенно.

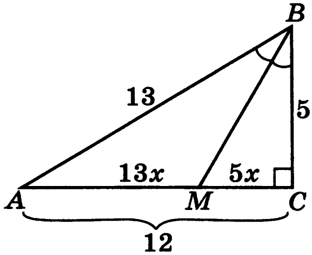


Рис. 3.6

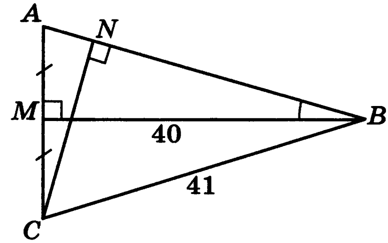


Рис. 3.7

На рисунке 3.6 изображен треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, $BC = 5$, $AB = 13$ и BM — биссектриса $\angle ABC$.

Тогда $MC = 5x$, $AM = 13x$ и $AC = 12$, т. е. $x = \dfrac{2}{3}$.

$\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{BC}{MC} = \dfrac{5}{5x} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ. 1,5.

<u>8.</u> Вычислите $\sin\left(2\arccos\dfrac{40}{41}\right)$.

<u>Решение.</u> Рассмотрим на рисунке 3.7 равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC = 41)$, $BM \perp AC$, $CN \perp AB$.

AM по теореме Пифагора имеет длину, равную 9.

Тогда $\sin\left(2\arccos\dfrac{40}{41}\right) = \dfrac{CN}{BC}$.

$BC = 41$, а $CN = \dfrac{AC \cdot BM}{AB}$, т. е. $CN = \dfrac{2 \cdot 9 \cdot 40}{41} = \dfrac{720}{41}$.

Значит, $\sin\left(2\arccos\dfrac{40}{41}\right) = \dfrac{720}{1681}$.

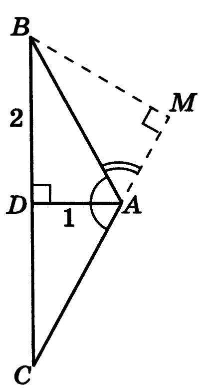


Рис. 3.8

Ответ. $\dfrac{720}{1681}$.

<u>9.</u> Вычислите cos (2 arctg 2).

В треугольнике BAC $\angle BAC = 2\operatorname{arctg} 2$ (рис. 3.8). Этот угол тупой, так как $\operatorname{arctg} 2 > \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Значит, $\cos(2\operatorname{arctg} 2) = -\cos\angle BAM$.

$\cos\angle BAM = \dfrac{AM}{AB}$.

По теореме Пифагора из $\triangle BAM$ получаем $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2}$, а из $\triangle ABD$ $AB = \sqrt{5}$.

BM можно найти как высоту треугольника ABC, т. е. $BM = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AC}$. Значит, $BM = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Теперь, подсчитав AM, получаем $\cos(2 \operatorname{arctg} 2) = -\frac{3}{5}$.

Ответ. $-\frac{3}{5}$.

__10.__ Вычислите $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$.

__**Решение.**__ Если на рисунке 3.8 считать длину AB равной 3, то $\angle BAD = \arccos\frac{1}{3}$ и $BD = 2\sqrt{2}$.

Угол $2\arccos\frac{1}{3}$ (это $\angle BAC$) тупой, так как $\arccos\frac{1}{3} > \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Значит, $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right) = -\cos\angle BAM$. Закончив вычисления, аналогичные вычислениям в предыдущем задании, получим $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{9}$.

Ответ. $-\frac{7}{9}$.

__11.__ Решите уравнение

$$\arcsin \lg x^2 + \arcsin \lg x = \frac{\pi}{3}.$$

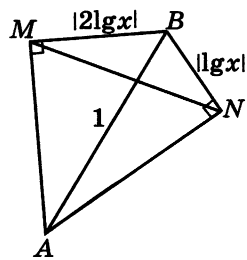


Рис. 3.9

Здесь, как правило, учащиеся отмечают условие $|\lg x| \leqslant \frac{1}{2}$. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABM и ABN с гипотенузой AB, равной 1 (рис. 3.9).

Пусть $MB = |2\lg x|$ и $NB = |\lg x|$. Тогда $\angle MAN$, согласно условию, имеет величину $\frac{\pi}{3}$. Так как точки A, M, B, N лежат на окружности с диаметром AB, то длина хорды MN по теореме синусов равна $AB\sin\frac{\pi}{3}$, т. е. $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

С другой стороны, в треугольнике MBN по теореме косинусов $MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2MB \cdot BN \cos\angle MBN$. Так как $\cos\angle MBN = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, то имеем $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (2\lg x)^2 + (\lg x)^2 - 2 \cdot 2\lg x \cdot \lg x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ и далее $7\lg^2 x = \frac{3}{4}$, а затем $|\lg x| = \frac{\sqrt{21}}{14}$, откуда $x_1 = 0{,}1^{\frac{\sqrt{21}}{14}}$, $x_2 = 10^{\frac{\sqrt{21}}{14}}$.

Оба значения удовлетворяют условию $|\lg x| \leqslant \frac{1}{2}$, однако число x_1 не является корнем заданного уравнения (проверьте это самостоятельно).

Ответ. $10^{\frac{\sqrt{21}}{14}}$.

Замечание. Этот пример может еще раз проиллюстрировать тезис — «не все числа, входящие в ОДЗ, являются корнями уравнения».

<u>12.</u> Решите уравнение $\arcsin\frac{1}{x} + \arccos\frac{2}{x} = \frac{\pi}{6}$.

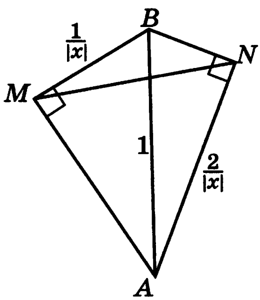


Рис. 3.10

Очевидно, что $|x| \geqslant 2$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABM и ABN с гипотенузой AB, равной 1 (рис. 3.10).

Пусть $BM = \frac{1}{|x|}$ и $AN = \frac{2}{|x|}$. Тогда $\angle MAN = \frac{\pi}{6}$.

Так как точки A, M, B, N лежат на окружности с диаметром AB, то длина хорды MN по теореме синусов равна $AB\sin\frac{\pi}{6}$, т. е. $MN = \frac{1}{2}$.

Из треугольника AMN по теореме косинусов имеем $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN\cos\angle MAN$, т. е.

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2} - 2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{|x|} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{3}{x^2} + \frac{3}{4} = 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}.$$

Если для удобства решения $\frac{1}{x^2}$ заменить на t (заметим, что $0 < t \leqslant \frac{1}{4}$), то далее получим уравнение $112t^2 - 40t + 3 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = \frac{3}{28}$ и $t_2 = \frac{1}{4}$.

Сделав обратную замену, найдем четыре значения для x, удовлетворяющие неравенству $|x| \geqslant 2$.

Однако только $x = 2$ есть корень исходного уравнения (проверьте это самостоятельно).

Ответ. 2.

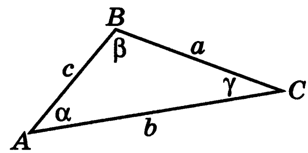
ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК № 3

1. Треугольник

1) Теорема синусов.

В $\triangle ABC$ $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R,$

R — радиус описанной окружности.



2) Теорема косинусов. В $\triangle ABC$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$

3) Площадь треугольника:

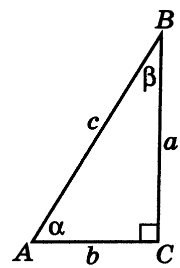
$$S_\triangle = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta,$$

$$S_\triangle = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2},$$

R — радиус описанной окружности,
r — радиус вписанной окружности.

2. Прямоугольный треугольник



1) $\alpha + \beta = 90°.$

2) $\sin\alpha = \cos\beta = \dfrac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{a}{b}$,

$\cos\alpha = \sin\beta = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$.

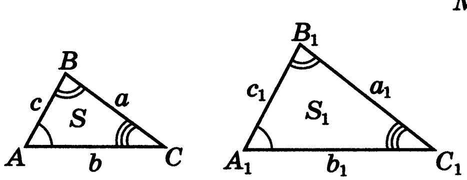
3) Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.

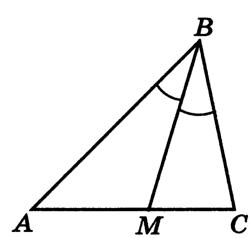
4) $S_\triangle = \dfrac{1}{2}ab.$

3. Подобные треугольники

$a_1 = ka,\quad \angle A_1 = \angle A,$
$b_1 = kb,\quad \angle B_1 = \angle B,$
$c_1 = kc,\quad \angle C_1 = \angle C,$
$S_1 = k^2S.$

BM — биссектриса $\angle ABC$, $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AB}{BC}$.





4. Формулы

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$
$\mathrm{tg}\ (90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha,$
$\mathrm{ctg}\,(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha;$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$
$\mathrm{tg}\ (180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha,$
$\mathrm{ctg}\,(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha.$

5. Аркусы

1) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\sin(\arcsin x) = x$;
$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, $\cos(\arccos x) = x$;
$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\,x < \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\,x) = x$;
$0 < \mathrm{arcctg}\,x < \pi$, $\mathrm{ctg}\,(\mathrm{atcctg}\,x) = x$.

2) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
$\mathrm{arctg}\,(-x) = -\mathrm{arctg}\,x$;
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;
$\mathrm{arcctg}\,(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\,x$.

3) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;
$\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arcctg}\,x = \frac{\pi}{2}$;
$\mathrm{arctg}\,x = \mathrm{arcctg}\,\frac{1}{x}$.

*Природа «scritta in lingua matematica»**
Галилео Галилей

Дождь звезд и синие поля послушны числам.
Велимир Хлебников

УПРАЖНЕНИЯ

Решите геометрически и по формулам.

1. Вычислите:

а) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)$;

б) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{7}+\operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

2. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$;

б) $\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}-\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$;

в) $2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{5}{13}$;

г) $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}-\operatorname{arctg}2{,}4$.

3. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{24}{25}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{9}{41}\right)$;

г) $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}\right)$.

4. Вычислите:

а) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}\right)$;

в) $\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1))$;

г) $\sin\left(2\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

д) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)$;

е) $\sin(2\operatorname{arctg}2\sqrt{2})$;

ж) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$;

з) $\operatorname{ctg}\left(2\arccos\frac{1}{5}\right)$.

5. Проверьте равенство:

а) $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}+\operatorname{arcctg}\frac{8}{15}=\frac{\pi}{2}$;

* Написана на математическом языке.

в) $\arccos \frac{7}{25} + \arccos \frac{24}{25} + \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} 1 =$

г) $\sin (2\operatorname{arctg} 0{,}5) + \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin \frac{15}{17}\right) = 1{,}4.$

6. Докажите, что:

а) $\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

б) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. Решите уравнение:

а) $\operatorname{arctg} 3x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$;

б) $\arccos x + \arccos \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$;

в) $\arccos 4x + \arccos 2x = \frac{\pi}{3}$;

г) $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{2\pi}{3}$;

д) $\arccos \log_2 x + \arcsin \log_2 \sqrt{x} = \frac{\pi}{6}$.

Математику уж затем учить
следует, что она ум в порядок приводит.
М. Ломоносов

Этюд 4. ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ

В этом этюде, дорогие читатели, мы приводим примеры взаимосвязанных задач, в условии которых записаны «квадратные иррациональности».

Начиная с 8 класса школьники привыкают к заданиям, в условии которых есть знаки квадратных корней. К сожалению, во всех учебниках алгебры для основной школы (7—9 классы) эти задания являются либо задачами первого предъявления (иллюстрации и образцы), либо простыми задачами-упражнениями.

На наш взгляд, систему задач целесообразно дополнить. Этим дополнением могут быть, например, задания, быстро решаемые *геометрически*.

1. Найдите наименьшее значение функции
$f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3x\sqrt{3}+9}$ *.

Решение. Рассмотрим на рисунке 4.1 $\triangle ACD$ ($AC=2$, $CD=x$, $\angle ACD=90°$) и $\triangle BCD$ ($BC=3$, $CD=x$, $\angle BCD=30°$). Из $\triangle ACD$ по теореме Пифагора $AD=\sqrt{x^2+4}$, а из $\triangle BCD$ по теореме косинусов

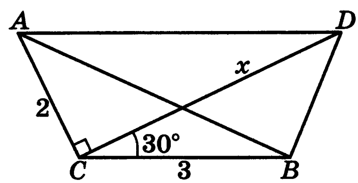


Рис. 4.1

$$DB=\sqrt{x^2+9-3x\sqrt{3}}.$$

$\min f(x)=\min(AD+DB)=AB.$

Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов

$$AB=\sqrt{2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 120°}=\sqrt{19}.$$

Ответ. $\sqrt{19}$.

Замечание. На рисунках 4.1 и 4.2 точка D может лежать и во внутренней области $\triangle ABC$. На результат это никак не влияет, так как наименьшее значение функции достигается, если $D\in AB$. При этом очевидным является появление новых заданий.

2. При каком значении x функция

$$f(x)=\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$$

принимает свое наименьшее значение?

---

* Это задание и следующие, как правило, решают во втором полугодии 10 класса и позже.

Решение.

По рисунку 4.2 находим площади треугольников ABC, ACD и BCD:

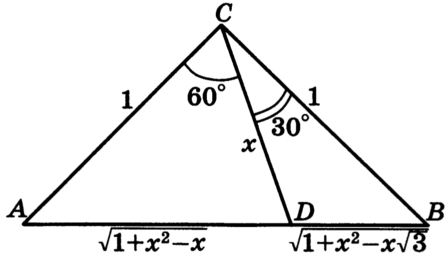


Рис. 4.2

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$,

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \cdot \sin 60° = \frac{x\sqrt{3}}{4}$,

$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \cdot \sin 30° = \frac{x}{4}$.

Значит, $\frac{1}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{4} + \frac{x}{4}$, т. е. $x = \sqrt{3} - 1$.

Ответ. $\sqrt{3} - 1$.

Замечание. Естественным продолжением заданий 1 и 2 является задание 3.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 5x\sqrt{2} + 25} + \sqrt{x^2 - 12x\sqrt{2} + 144} = 13.$$

Замечание. Иррациональные уравнения, согласно государственной программе по математике для средних общеобразовательных учреждений, решают в 11 классе. Стандартным приемом (возводить в квадрат обе части уравнения, до тех пор пока «не пропадут корни») эти уравнения решаются утомительно. Геометрические решения таких уравнений значительно короче.

Решение. Геометрическая интерпретация уравнения представлена на рисунке 4.3.

Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора $AB = 13$.

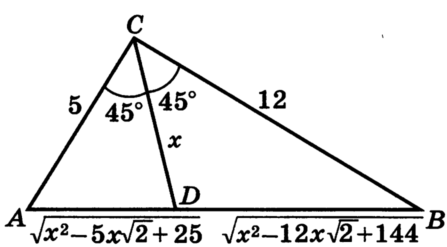


Рис. 4.3

$D \in AB$, так как $\min f(x) = \min (AD + DB) = AB$, где $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x\sqrt{2} + 25} + \sqrt{x^2 - 12x\sqrt{2} + 144}$.

Чтобы найти значение x, поступим так же, как и в задании 2, заметив предварительно, что если уравнение имеет корни, то они должны быть положительными (при $x \leqslant 0$ значение левой части уравнения не меньше 17).

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30,$

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x \cdot \sin 45° = \frac{5x\sqrt{2}}{4},$

$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x \cdot \sin 45° = 3x\sqrt{2}.$

Значит, $30 = \frac{5x\sqrt{2}}{4} + 3x\sqrt{2}$ и $x = \frac{60\sqrt{2}}{17}$.

Ответ. $\frac{60\sqrt{2}}{17}$.

4. Для каждого значения параметра a укажите, сколько различных значений может принимать $\operatorname{tg} z$ в уравнении $\sqrt{a^2 - \operatorname{tg}^2 z} = 1 - \operatorname{tg} z$.

Решение. Это очень непростое уравнение. Решать его традиционным приемом нелегко, а геометрическое решение воспринимается сразу, если $\operatorname{tg} z$ заменить буквой x.

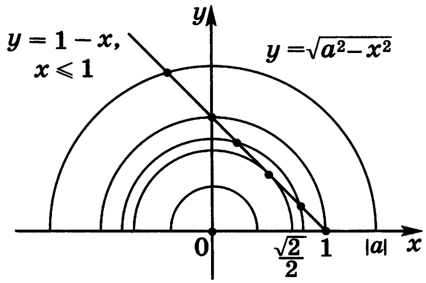


Рис. 4.4

На рисунке 4.4 изображено взаимное расположение графиков функций $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (полуокружность с центром в начале координат и радиусом $|a|$, принадлежащая верхней полуплоскости) и $y = 1 - x$ при $x \leqslant 1$ (луч с началом в точке (1; 0), проходящий через точку (0; 1)).

Итак, уравнение $\sqrt{a^2 - x^2} = 1 - x$:

при $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ корней не имеет;

при $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $|a| > 1$ имеет ровно один корень;

при $\frac{\sqrt{2}}{2} < |a| \leqslant 1$ имеет ровно два корня.

Значит, tg z:

при $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ принимает ровно одно значение, но для $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ это одно число, а для $\frac{\sqrt{2}}{2}$ — другое;

при $|a| > 1$ принимает ровно одно значение;

при $\frac{\sqrt{2}}{2} < |a| \leqslant 1$ принимает ровно два различных значения.

Очередным звеном в нашей последовательности взаимосвязанных задач является задание 5.

5. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}.$$

Решение. Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором $\angle ACB = 90°$, $\angle ACD = 30°$, $AC = x$, $BC = 3$, $CD = 1$ и точка D лежит во внутренней области $\triangle ABC$ (рис. 4.5).

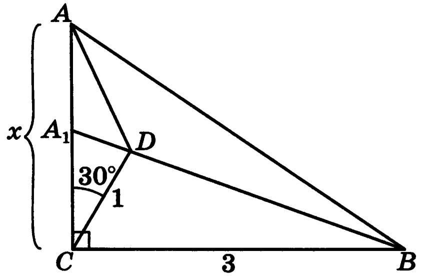


Рис. 4.5

Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора $AB = \sqrt{x^2+9}$. Из $\triangle ACD$ по теореме косинусов $AD = \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$.

$\max f(x) = \max(AB - AD) = A_1B - A_1D = DB$,
где $A_1 \in AC$ (т. е. если $D \in AB$).

Из $\triangle BCD$ по теореме косинусов

$$DB = \sqrt{1^2 + 3^2 - 2\cdot 1\cdot 3\cdot \cos 60°} = \sqrt{7}.$$

Ответ. $\sqrt{7}$.

Задания 6—9 более сложные в нашей последовательности.

6. Найдите наименьшее значение функции:

① $f(x) = x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-14x+25} + \sqrt{2x^2-26x+89}$.

② $g(x) = \sqrt{5x^2+20} + \sqrt{5x^2-32x+64} + \sqrt{5x^2-40x+100} + \sqrt{5x^2-8x+16}$.

Решение. Эти задачи стандартным приемом в 10 классе решаются сложно и долго. В основной школе решение выполняется со значительно меньшими затратами сил и времени.

① Рассмотрим векторы $\vec{a}\,(x;\,x)$, $\vec{b}\,(4-x;\,3-x)$, $\vec{c}\,(x+1;\,x)$, $\vec{d}\,(5-x;\,8-x)$ и их модули:

$|\vec{a}| = x\sqrt{2}$,

$|\vec{b}| = \sqrt{2x^2-14x+25}$,

$|\vec{c}| = \sqrt{2x^2+2x+1}$,

$|\vec{d}| = \sqrt{2x^2-26x+89}$.

$f\,(x) = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}|$.

Так как $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geqslant |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|$, то $\min f\,(x) = |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|$. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d} = \overrightarrow{(10;\,11)}$, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}| = \sqrt{221}$. Значит, $\min f\,(x) = \sqrt{221}$ *.

Ответ. $\sqrt{221}$.

② Рассмотрим векторы $\vec{a}\,(5x;\,10)$, $\vec{b}\,(16-5x;\,8)$, $\vec{c}\,(20-5x;\,10)$, $\vec{d}\,(5x-4;\,8)$ и их модули:

$|\vec{a}| = \sqrt{25x^2+100} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5x^2+20}$,

$|\vec{b}| = \sqrt{25x^2-160x+320} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5x^2-32x+64}$,

$|\vec{c}| = \sqrt{25x^2-200x+500} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5x^2-40x+100}$,

$|\vec{d}| = \sqrt{25x^2-40x+80} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5x^2-8x+16}$.

$g\,(x) = \dfrac{|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}|}{\sqrt{5}}$.

Далее, как и для функции $f(x)$:

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d} = \overrightarrow{(32;\,36)}$, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}| = 4\sqrt{145}$. Значит, $\min f\,(x) = 4\sqrt{29}$.

Ответ. $4\sqrt{29}$.

7. Найдите наименьшее значение функции

$$f\,(x) = \sqrt{2x^2-4x+2} + \sqrt{2x^2} + \sqrt{2x^2-2x+2}.$$

Решение. Рассмотрим четыре точки $O\,(0;\,0)$, $A\,(1;\,1)$, $B\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};\;\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\,(x;\,x)$ и расстояния OM, AM и BM:

$$OM = \sqrt{2x^2},\ AM = \sqrt{2x^2-4x+2},\ BM = \sqrt{2x^2-2x+2}.$$

$$f\,(x) = OM + AM + BM.$$

---

* Иногда школьники системой задач своего учебника приучаются к «удобным» числам в ответах и допускают типичную ошибку: «$f\,(x) = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geqslant |\vec{a}+\vec{b}| + |\vec{c}+\vec{d}|$. $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{(4;\,3)}$, $|\vec{a}+\vec{b}| = 5$; $\vec{c}+\vec{d} = \overrightarrow{(6;\,8)}$, $|\vec{c}+\vec{d}| = 10$. Значит, $\min f\,(x) = 15$».

В треугольнике ABO нетрудно подсчитать длины его сторон: $AO = BO = AB = \sqrt{2}$. Значит, $\triangle ABO$ равносторонний и $\min(AM + OM + BM) = 3R$, где R — радиус описанной окружности около равностороннего треугольника. Так как $\sqrt{2} = R\sqrt{3}$, то $\min f(x) = \sqrt{6}$.

Ответ. $\sqrt{6}$.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

① $f(x) = 4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x}$.

②* $g(x) = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$.

Решение.

① Рассмотрим векторы $\vec{a}\,(\sqrt{1-x};\ \sqrt{x})$, $\vec{b}\,(4;\ 3)$ и их модули $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 5$.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x}$. Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, то $f(x) \leqslant 5$. Значит, $\max f(x) = 5$. Очевидно, что в этом случае $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, т. е. $\frac{\sqrt{1-x}}{4} = \frac{\sqrt{x}}{3}$ при $x = \frac{9}{25}$.

Функция $f(x)$ непрерывна в своей области определения $D(f) = [0;\ 1]$, возрастает на $[0;\ 0{,}36]$ и убывает на $[0{,}36;\ 1]$, $f(0) = 4$, $f(1) = 3$. Значит, $\min f(x) = 3$.

Ответ. $\min f(x) = f(1) = 3$, $\max f(x) = f(0{,}36) = 5$.

② Выполнение задания для функции $g(x)$ в основной школе потребует введения понятия вектора, его свойств и операций над векторами в трехмерном пространстве.

Представим функцию $g(x)$ в ее области определения $D(g) = [0;\ 2]$ в виде $g(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{1 - \frac{x}{2}} + 2\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$.

Рассмотрим векторы $\vec{a}\left(\sqrt{x};\ \sqrt{1 - \frac{x}{2}};\ \sqrt{1 - \frac{x}{2}}\right)$, $\vec{b}\,(1;\ 2;\ 2)$ и их модули $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$.

Далее, как и для функции $f(x)$.

Скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{x} \cdot 1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \cdot 2 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \cdot 2,$$

т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$.

Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, то $g(x) \leqslant 3\sqrt{2}$. Значит, $\max g(x) = 3\sqrt{2}$. Очевидно, что в этом случае $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, т. е. $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{2}}}{2}$ при $x = \frac{2}{9}$.

Функция $g(x)$ непрерывна в своей области определения $D(g) = [0;\ 2]$, возрастает на $\left[0;\ \frac{2}{9}\right]$ и убывает на $\left[\frac{2}{9};\ 2\right]$, $g(0) = 4$, $g(2) = \sqrt{2}$.

Значит, $\min g(x) = \sqrt{2}$.

Ответ. $\min g(x) = g(2) = \sqrt{2}$, $\max g(x) = g\left(\frac{2}{9}\right) = 3\sqrt{2}$.

9*. Найдите наименьшее значение функции $f(x;\ y;\ z)$, если

$f(x;\ y;\ z) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9}$ и $x + y + z = 8$*.

Решение. Решению задания способствует рисунок 4.6.

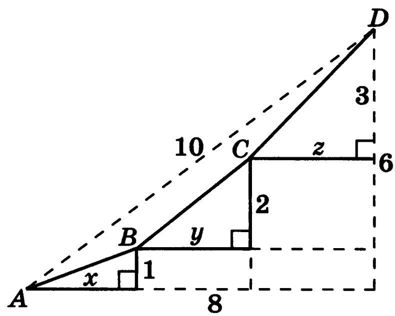


Рис. 4.6

Так как длина ломаной $ABCD$ не меньше 10, то $\min f(x;\ y;\ z) = 10$, если $x + y + z = 8$.

Ответ. 10.

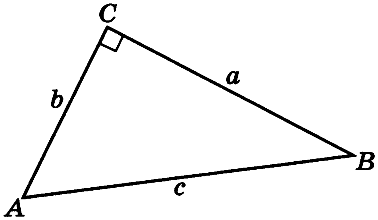
Замечание. Последовательность взаимосвязанных задач, конечно, не является конечной. Так, задания 6 и 7 могут быть основанием для создания новых, а задание 8 может быть и переформулировано, и послужить так же, как задания 6, 7.

---

* Функции многих переменных не входят в номенклатуру тем школьного курса математики.

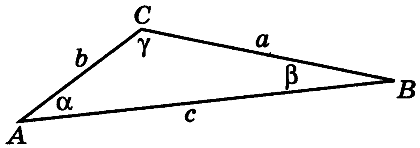
ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЛОК № 4

1. Теорема Пифагора



$$a^2 + b^2 = c^2.$$

2. Теорема косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C.$$

3. Квадратный корень

1) $\sqrt{a} = b,\ b \geqslant 0 \Leftrightarrow b^2 = a.$

2) $(\sqrt{a})^2 = a,\ \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geqslant 0, \\ -a & \text{при } a \leqslant 0. \end{cases}$

3) Для неотрицательных значений выражений a и b верны равенства (слева направо и наоборот):

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ b \neq 0.$$

4. Ненулевые векторы

1) $\vec{a}\,(x_1;\ y_1),\ |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2};$

$\vec{b}\,(x_2;\ y_2),\ |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$

2) $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2),\ |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2},$

$|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|.$

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

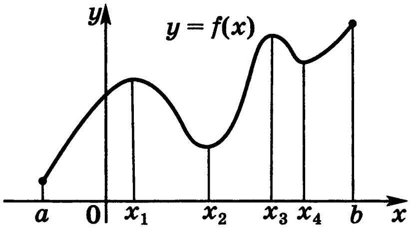
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2;$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|;$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}.$

5. Наибольшее (наименьшее) значение функции

x_1, x_2, x_3, x_4 — точки локальных экстремумов;
x_2, x_4 — точки минимумов;
x_1, x_3 — точки максимумов;
$\min f(x) = f(a)$ — наименьшее значение на $[a; b]$;
$\max f(x) = f(b)$ — наибольшее значение на $[a; b]$.

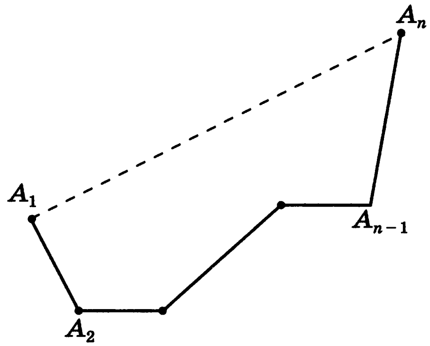


6. Ломаная

$\sum\limits_{k=2}^{n} A_{k-1}A_k$ —

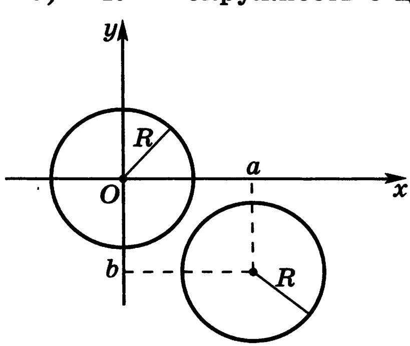
длина ломаной,

$\sum\limits_{k=2}^{n} A_{k-1}A_k \leqslant A_1A_n$.



7. Окружность радиуса R

$x^2 + y^2 = 0$ — начало координат $(0; 0)$,
$x^2 + y^2 = R^2$ — окружность с центром $(0; 0)$,
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ — окружность с центром $(a; b)$.



Все в природе подлежит измерению,
все может быть сосчитано.
Н. Лобачевский

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-2x\sqrt{3}+4}$;

в) $f(x)=\sqrt{x^2-5x\sqrt{2}+25}+\sqrt{x^2-12x\sqrt{2}+144}$.

2. При каком значении аргумента x функция $f(x)$ принимает свое наименьшее значение, если:

а) $f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3x\sqrt{3}+9}$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-2x\sqrt{3}+4}$;

в) $f(x)=\sqrt{x^2-5x\sqrt{2}+25}+\sqrt{x^2-12x\sqrt{2}+144}$?

3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3x\sqrt{3}+9}=\sqrt{19}$;

б) $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}=\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-2x\sqrt{3}+4}=2\sqrt{2}$;

г) $\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-14x+25}+\sqrt{2x^2-26x+89}+x\sqrt{2}=$
$=\sqrt{221}$;

д) $\sqrt{5x^2+20}+\sqrt{5x^2-32x+64}+\sqrt{5x^2-40x+100}+$
$+\sqrt{5x^2-8x+16}=4\sqrt{2}$;

е) $\sqrt{2x^2+2-4x}+x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+2-2x}=\sqrt{6}$.

4. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+16}+\sqrt{z^2+25}$, если $x+y+z=5$;

б) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+9}+\sqrt{z^2+16}$, если $x+y+z=15$;

в) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}+\sqrt{t^2+16}$, если
$x+y+z+t=24$.

И нет движенья — ни вперед, ни назад,
Ни вверх и ни вниз.

Т. Элиот

Этюд 5. ОБ ЭКСТРЕМУМАХ

Нахождение экстремумов некоторых рациональных функций доступно школьникам уже в 8 классе. К сожалению, в действующих учебниках математики 7—9 классов таких задач почти нет, и совсем нигде не рассматривается применимость неравенства о средних к их решению.

Здесь мы рассматриваем, дорогие читатели, 29 задач, объединенных в семь серий. К каждой серии дается *подсказка*. Для всех задач указаны ответы, но некоторые задачи серий приведены без решений (решите их самостоятельно).

Учащимся старших классов, на наш взгляд, целесообразно сравнить предлагаемые решения задач с решениями, основой которых служит использование производной заданной функции.

Рассмотрим отрезки, длины которых a и b, их *среднее арифметическое* $\frac{a+b}{2}$, *среднее геометрическое* $\sqrt{ab}$ и *среднее гармоническое* $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Сравнение этих величин, проанализировав рисунки 5.1—5.3, нетрудно проследить на уроках геометрии.

Из подобия треугольников ADC и CDB (рис. 5.1) получаем $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$, т. е. $CD=\sqrt{ab}$. Рисунок 5.2 иллюстрирует неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (равенство средних арифметического и геометрического очевидно при $a=b$). Из подобия треугольников CDE и COD (рис. 5.3) следует пропорциональность длин их сходственных сторон: $\frac{CE}{CD}=\frac{CD}{CO}$, т. е.

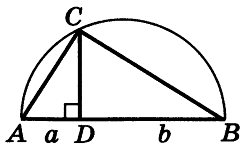


Рис. 5.1

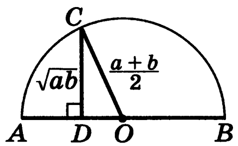


Рис. 5.2

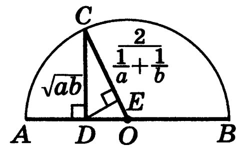


Рис. 5.3

$CE = \dfrac{ab}{\frac{a+b}{2}}$ или $CE = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Так как $CE < CD$, то $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$.
Равенство всех трех средних величин достигается при $a = b$.

На уроках алгебры эти неравенства применимы к решению задач из серий 1—7.

Серия 1. При каком значении аргумента x функция $f(x)$ принимает наибольшее значение? Вычислите $\max f(x)$. (*Подсказка*: $ab \leqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.)

① $f(x) = x(1 - x)$, $0 < x < 1$.

② $f(x) = 2x(3 - x)$, $0 < x < 3$.

③ $f(x) = x(2 - 3x)$, $0 < x < \dfrac{2}{3}$.

④ $f(x) = -x^2 + 4x$, $0 < x < 4$.

⑤ $f(x) = 1 - x^2 + 6x$, $0 < x < 6$.

⑥ $f(x) = 5x - 4 - x^2$, $0 < x < 5$.

⑦ $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $0 < x < 3$.

Решение.

1) $x(1 - x) \leqslant \left(\dfrac{x+1-x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, $x(1 - x) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Ответ. $\max f(x) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

2) $2x(3 - x) \leqslant 2\left(\dfrac{x+3-x}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{2}$, $2x(3 - x) = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Ответ. $\max f(x) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{2}$.

3) $x(2 - 3x) = \dfrac{1}{3} \cdot 3x(2 - 3x) \leqslant \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3x+2-3x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$,
$x(2 - 3x) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Ответ. $\max f(x) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.

4) $-x^2 + 4x = x(4 - x) \leqslant \left(\dfrac{x+4-x}{2}\right)^2 = 4$,
$-x^2 + 4x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Ответ. $\max f(x) = f(2) = 4$.

5) $1 - x^2 + 6x = 1 + x(6 - x) \leqslant 1 + \left(\frac{x + 6 - x}{2}\right)^2 = 10,$

$1 - x^2 + 6x = 10 \Leftrightarrow x = 3.$

Ответ. $\max f(x) = f(3) = 10.$

6) $5x - 4 - x^2 = x(5 - x) - 4 \leqslant \left(\frac{x + 5 - x}{2}\right)^2 - 4 = \frac{9}{4},$

$5x - 4 - x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$

Ответ. $\max f(x) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}.$

7) **Ответ.** $\max f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}.$

Серия 2. При каком значении аргумента x функция $g(x)$ принимает наименьшее значение? Вычислите $\min g(x)$. (*Подсказка*: если $c < d$, то $-c > -d$.)

① $g(x) = x(x - 1),\ 0 < x < 1.$

② $g(x) = 2x(x - 3),\ 0 < x < 3.$

③ $g(x) = x(3x - 2),\ 0 < x < \frac{2}{3}.$

④ $g(x) = x^2 - 4x,\ 0 < x < 4.$

⑤ $g(x) = x^2 - 6x - 1,\ 0 < x < 6.$

⑥ $g(x) = x^2 - 5x + 4,\ 0 < x < 5.$

Решение.

1) $x(x - 1) = -x(1 - x) \geqslant -\left(\frac{x + 1 - x}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4},$

$x(x - 1) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

Ответ. $\min g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$

2) **Ответ.** $\min g(x) = g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}.$

3) **Ответ.** $\min g(x) = g\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$

4) **Ответ.** $\min g(x) = g(2) = -4.$

5) $x^2 - 6x - 1 = -x(6 - x) - 1 \geqslant -\left(\frac{x + 6 - x}{2}\right)^2 - 1 = -10,$

$x^2 - 6x - 1 = -10 \Leftrightarrow x = 3.$

Ответ. $\min g(x) = g(3) = -10.$

6) $x^2-5x+4=-x(5-x)+4\geqslant -\left(\frac{x+5-x}{2}\right)^2+4=-\frac{9}{4}$,
$x^2-5x+4=-\frac{9}{4}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Ответ. $\min g(x)=g\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{9}{4}$.

Серия 3. При каком значении аргумента x функция $h(x)$ принимает наименьшее значение? Вычислите $\min h(x)$. (*Подсказка*: $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.)

① $h(x)=4x+\frac{9}{x}$, $x>0$.

② $h(x)=\frac{x^2+4}{3x}$, $x>0$.

③ $h(x)=\frac{5x^2+4x+20}{2x}$, $x>0$.

④ $h(x)=\frac{4x^2-3x+9}{x}$, $x>0$.

⑤ $h(x)=\frac{x^2+7}{x+3}$, $x>-3$.

Решение.

1) $4x+\frac{9}{x}\geqslant 2\sqrt{4x\cdot\frac{9}{x}}=12$, $4x+\frac{9}{x}=12\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Ответ. $\min h(x)=h\left(\frac{3}{2}\right)=12$.

2) $\frac{x^2+4}{3x}=\frac{1}{3}\left(x+\frac{4}{x}\right)\geqslant\frac{2}{3}\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=\frac{4}{3}$, $\frac{x^2+4}{3x}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=2$.

Ответ. $\min h(x)=h(2)=\frac{4}{3}$.

3) $\frac{5x^2+4x+20}{2x}=\frac{1}{2}\left(5x+\frac{20}{x}\right)+2\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5x\cdot\frac{20}{x}}+2=12$,
$\frac{5x^2+4x+20}{2x}=12\Leftrightarrow x=2$.

Ответ. $\min h(x)=h(2)=12$.

4) $\frac{4x^2-3x+9}{x}=4x+\frac{9}{x}-3\geqslant 2\sqrt{4x\cdot\frac{9}{x}}-3=9$,
$\frac{4x^2-3x+9}{x}=9\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Ответ. $\min h(x)=h\left(\frac{3}{2}\right)=9$.

5) $\dfrac{x^2+7}{x+3}=\dfrac{x^2+6x+9-6x-18+16}{x+3}=$

$=\dfrac{(x+3)^2+16-6(x+3)}{x+3}=x+3+\dfrac{16}{x+3}-6\geqslant$

$\geqslant 2\sqrt{(x+3)\cdot\dfrac{16}{x+3}}-6=2,\quad \dfrac{x^2+7}{x+3}=2\Leftrightarrow x=1.$

Ответ. $\min h\,(x)=h\,(1)=2.$

Серия 4. При каком значении аргумента x функция $t\,(x)$ принимает наибольшее значение? Вычислите $\max\ t\,(x)$. (*Подсказка*: $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$.)

① $t\,(x)=\dfrac{2}{4x+\dfrac{9}{x}}$, $x>0$.

② $t\,(x)=\dfrac{x}{x^2+25}$, $x>0$.

③ $t\,(x)=\dfrac{3x}{x^2+16}$, $x>0$.

④ $t\,(x)=\dfrac{4x-4}{x^2-2x+10}$, $x>1$.

Решение.

1) $\dfrac{2}{4x+\dfrac{9}{x}}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{4x}\cdot\dfrac{x}{9}}=\dfrac{1}{6},\ \dfrac{2}{4x+\dfrac{9}{x}}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}.$

Ответ. $\max\ t\,(x)=t\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{6}.$

2) $\dfrac{x}{x^2+25}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{x+\dfrac{25}{x}}\leqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{25}}=\dfrac{1}{10},$

$\dfrac{x}{x^2+25}=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow x=5.$

Ответ. $\max\ t\,(x)=t\,(5)=\dfrac{1}{10}.$

3) $\dfrac{3x}{x^2+16}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{x+\dfrac{16}{x}}\leqslant\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{16}}=\dfrac{3}{8},\ \dfrac{3x}{x^2+16}=\dfrac{3}{8}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2.$

Ответ. $\max\ t\,(x)=t\,(2)=\dfrac{3}{8}.$

4) $\dfrac{4x-4}{x^2-2x+10}=2\cdot\dfrac{2}{x-1+\dfrac{9}{x-1}}\leqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{x-1}{9}}=\dfrac{2}{3}$,

$\dfrac{4x-4}{x^2-2x+10}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x=4.$

Ответ. $\max t(x)=t(4)=\dfrac{2}{3}$.

Серия 5. При каком значении аргумента x функция $y(x)$ принимает наименьшее значение? Вычислите $\min y(x)$.

① $y(x)=\dfrac{x^2+4x+53}{x+2}$, $x>-2$.

② $y(x)=\dfrac{x^2-5}{x-3}$, $x>3$.

③ $y(x)=\dfrac{x^2-3x+38}{x-1}$, $x>1$.

Решение.

А. Воспользуемся *подсказкой* к решению задач серии 3.

1) $\dfrac{x^2+4x+53}{x+2}=x+2+\dfrac{49}{x+2}\geqslant 2\sqrt{(x+2)\cdot\dfrac{49}{x+2}}=14$,

$\dfrac{x^2+4x+53}{x+2}=14\Leftrightarrow x=5.$

Ответ. $\min y(x)=y(5)=14$.

2) $\dfrac{x^2-5}{x-3}=\dfrac{x^2-9+4}{x-3}=x+3+\dfrac{4}{x-3}=x-3+\dfrac{4}{x-3}+6\geqslant$

$\geqslant 2\sqrt{(x-3)\cdot\dfrac{4}{x-3}}+6=10$, $\dfrac{x^2-5}{x-3}=10\Leftrightarrow x=5.$

Ответ. $\min y(x)=y(5)=10$.

3) $\dfrac{x^2-3x+38}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2-(x-1)+36}{x-1}=x-1+\dfrac{36}{x-1}-1\geqslant$

$\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{36}{x-1}}-1=11$, $\dfrac{x^2-3x+38}{x-1}=11\Leftrightarrow x=7.$

Ответ. $\min y(x)=y(7)=11$.

Б. Эти задачи можно решить по-другому, если учесть, что $\begin{cases}c<d\\ cd>0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{d}$. Воспользуемся *подсказкой* к решению задач серии 4 и вычислим $\max\left(\dfrac{1}{y(x)}\right)$.

1) $\dfrac{x+2}{x^2+4x+53}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{x+2+\dfrac{49}{x+2}}\leqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x+2}\cdot\dfrac{x+2}{49}}=\dfrac{1}{14},$

$\max\left(\dfrac{1}{y(x)}\right)=\dfrac{1}{14}\Leftrightarrow\min y(x)=14$ *.

2) $\dfrac{x-3}{x^2-5}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{x-3+\dfrac{4}{x-3}+6}\leqslant\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{2\sqrt{(x-3)\cdot\dfrac{4}{x-3}}+6}=$

$=\dfrac{1}{10}$, $\min y(x)=10$.

3) $\dfrac{x-1}{x^2-3x+38}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{x-1+\dfrac{36}{x-1}-1}\leqslant\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{36}{x-1}}-1}=$

$=\dfrac{1}{11}$, $\min y(x)=11$.

Для второй и третьей задач мы применили также неравенство $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, позволившее уменьшить знаменатель дроби.

Серия 6. Докажите теоремы:

① Из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

② Из всех прямоугольников с заданной площадью наименьший периметр имеет квадрат.

Решение.

1) Пусть одна из сторон прямоугольника имеет длину x, тогда при заданном периметре $P=4a$ у другой его стороны длина $2a-x$. Площадь этого прямоугольника $S(x)=(2a-x)x$.

Известно: $(2a-x)\,x\leqslant\left(\dfrac{2a-x+x}{2}\right)^2=a^2$.

$(2a-x)\,x=a^2\Leftrightarrow x^2-2xa+a^2=0\Leftrightarrow x=a;$

$$\max S(x)=a^2.$$

Так как $2a-x=a$ при $x=a$, то наибольшую площадь имеет прямоугольник с равными сторонами, т. е. квадрат.

2) Пусть одна из сторон прямоугольника имеет длину x, тогда при заданной площади $S=a^2(a>0)$ у другой его стороны длина $\dfrac{a^2}{x}$. Периметр этого прямоугольника $P(x)=2\left(x+\dfrac{a^2}{x}\right)$.

---

* **Внимание.** Верное утверждение для функций серии 5 может быть ложным для других функций.

Известно: $2\left(x+\frac{a^2}{x}\right) \geqslant 2\cdot 2\sqrt{x\cdot\frac{a^2}{x}} = 4a.$

$2\left(x+\frac{a^2}{x}\right) = 4a \Leftrightarrow x^2 - 2xa + a^2 = 0 \Leftrightarrow x = a;$

$$\min P(x) = 4a.$$

Так как $\frac{a^2}{x} = a$ при $x = a$, то наименьший периметр имеет прямоугольник с равными сторонами, т. е. квадрат.

Серия 7. Проверьте истинность утверждения «Сумма взаимно обратных положительных чисел a и $\frac{1}{a}$ не меньше двух», а затем докажите неравенство $A > B$.

① $A = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$, $B = 2$.

② $A = -2$, $B = \frac{x - x^2 - 21}{\sqrt{x^2 - x + 20}}$.

Решение.

1) $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} > 2$, т. е. $A > B$*.

2) $\frac{x - x^2 - 21}{\sqrt{x^2 - x + 20}} = -\frac{x^2 - x + 21}{\sqrt{x^2 - x + 20}}$;

$\frac{x^2 - x + 21}{\sqrt{x^2 - x + 20}} = \sqrt{x^2 - x + 20} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 20}} > 2$, т. е. $-B > -A$.

Значит, $A > B$*.

---

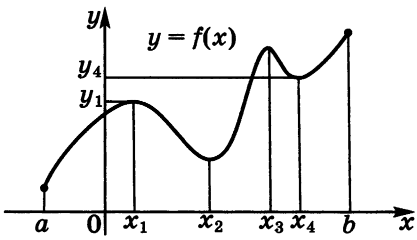
* Знак неравенства строгий, так как эти взаимно обратные числа отличны от 1.

1. Подобные треугольники

$a_1 = ka, \quad \angle A_1 = \angle A,$
$b_1 = kb, \quad \angle B_1 = \angle B,$
$c_1 = kc, \quad \angle C_1 = \angle C,$
$S_1 = k^2 S.$

2. Наибольшее (наименьшее) значение функции

x_i ($i = 1;\ 2;\ 3;\ 4$) — точки экстремумов;
x_2, x_4 — точки локальных минимумов;
x_1, x_3 — точки локальных максимумов;
y_1 — локальный максимум функции;
y_4 — локальный минимум функции;
$\min f(x) = f(a)$ — наименьшее значение на $[a;\ b]$;
$\max f(x) = f(b)$ — наибольшее значение на $[a;\ b]$.



3. Средние величины для n положительных чисел

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$ — среднее гармоническое;

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$ — среднее геометрическое;

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$ — среднее арифметическое;

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$ — среднее квадратичное.

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n.$$

4. Неравенство о средних для двух положительных чисел a и b

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Терпенье и труд все перетрут.
Поговорка

УПРАЖНЕНИЯ

1. При каком значении аргумента x функция $f(x)$ принимает наибольшее значение? Вычислите $\max f(x)$.

а) $f(x) = x(3 - x),\ 0 < x < 3;$

б) $f(x) = 5x(4 - x),\ 0 < x < 4;$

в) $f(x) = 3x(1 - 2x),\ 0 < x < \frac{1}{2};$

г) $f(x) = 8x - x^2,\ 0 < x < 8;$

д) $f(x) = 3 - x^2 + 5x,\ 0 < x < 5;$

е) $f(x) = 4x - x^2 - 5,\ 0 < x < 4;$

ж) $f(x) = 7 - 3x^2 + 4x,\ 0 < x < \frac{4}{3}.$

2. При каком значении аргумента x функция $f(x)$ принимает наименьшее значение? Вычислите $\min f(x)$.

а) $f(x) = x(x - 3),\ 0 < x < 3;$

б) $f(x) = 5x(x - 4),\ 0 < x < 4;$

в) $f(x) = 3x(2x - 1),\ 0 < x < \frac{1}{2};$

г) $f(x) = x^2 - 8x,\ 0 < x < 8;$

д) $f(x) = x^2 - 5x - 3,\ 0 < x < 5;$

е) $f(x) = x^2 - 4x + 5,\ 0 < x < 4;$

ж) $f(x) = 3x^2 - 4x + 7,\ 0 < x < \frac{4}{3}.$

3. При каком значении аргумента x функция $f(x)$ принимает наименьшее значение? Вычислите $\min f(x)$.

а) $f(x) = 3x + \frac{27}{x},\ x > 0;$

б) $f(x) = \frac{x^2 + 16}{5x},\ x > 0;$

в) $f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 9}{7x},\ x > 0;$

г) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x},\ x > 0;$

д) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2},\ x > -2;$

е) $f(x) = \frac{x^2 - 7}{x - 4},\ x > 4;$

ж) $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 5}{x - 2},\ x > 2.$

4. При каком значении аргумента x функция $f(x)$ принимает наибольшее значение? Вычислите $\max f(x)$.

а) $f(x) = \dfrac{2}{x + \dfrac{1}{x}}$, $x > 0$;

б) $f(x) = \dfrac{2}{3x + \dfrac{27}{x}}$, $x > 0$;

в) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 36}$, $x > 0$;

г) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 81}$, $x > 0$;

д) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$, $x > 0$;

е) $f(x) = \dfrac{7x}{4x^2 + 3x + 9}$, $x > 0$;

ж) $f(x) = \dfrac{3x - 9}{x^2 - 6x + 13}$, $x > 3$.

Учащимся 10—11 классов советуем выполнить задания всех серий стандартным приемом, который рекомендован в учебнике «Алгебра и начала анализа».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При написании этой книги автор руководствовался несколькими соображениями.

Место математики в системе общечеловеческих ценностей, на овладение которыми нацелена система образования, определяется тем воздействием, какое она может оказать на развитие личности школьника. Поэтому из различных граней этого воздействия следует выбрать те, которые имеют *наибольший кпд на развитие компетентности* учащихся в математике.

Важной составной частью культуры человека является широкий спектр способов его деятельности. Поэтому очень важным является установление школьниками крепких внутрипредметных связей в школьном курсе математики. Существенному расширению способов их математической деятельности могут помочь наглядные решения задач, так как *знать математику означает уметь решать задачи.*

Сегодня в рамках действующего учебного плана по математике из-за нехватки времени учителю очень трудно проводить этапы заключительного повторения. Однако *отбор задач на интегрированные уроки математики* может отчасти ликвидировать эту трудность.

Замечания и предложения просим направлять в издательство «Просвещение» по адресу: 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

С уважением автор

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Архимед	(III в. до н. э.)	— древнегреческий математик и механик
Галилей Галилео	(1564—1642)	— итальянский философ и естествоиспытатель
Гильберт Давид	(1862—1943)	— немецкий математик
Дюрер Альбрехт	(1471—1528)	— немецкий художник, математик и теоретик искусства
Достоевский Федор Михайлович	(1821—1881)	— русский писатель
Евклид	(III в. до н. э.)	— древнегреческий математик
Кеплер Иоганн	(1571—1630)	— немецкий астроном и математик
Конфуций	(IV в. до н. э.)	— древнекитайский философ и просветитель
Леонардо да Винчи	(1452—1519)	— итальянский художник, скульптор, архитектор, математик и инженер
Леонардо Фибоначчи	(1180—1240)	— итальянский математик
Лермонтов Михаил Юрьевич	(1814—1841)	— великий русский поэт
Лобачевский Николай Иванович	(1792—1856)	— русский математик
Ломоносов Михаил Васильевич	(1711—1765)	— первый русский естествоиспытатель, поэт, художник, историк и просветитель

Пифагор	(VI в. до н. э.)	— древнегреческий философ и математик
Пушкин Александр Сергеевич	(1799—1837)	— великий русский поэт, родоначальник новой русской литературы
Руставели Шота	(XII в.)	— великий грузинский поэт
Пойа Дьёрдь	(1887—1985)	— швейцарский математик
Фидий	(III в. до н. э.)	— древнегреческий астроном и математик
Хлебников Виктор Владимирович	(1885—1922)	— русский поэт
Шарыгин Игорь Федорович	(1937—2004)	— русский математик
Элиот Томас Стернд	(1888—1965)	— английский поэт, лауреат Нобелевской премии

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Серия «Библиотека учителя»

Генкин Григорий Зиновьевич

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Книга для учителя

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художник *А. Б. Юдкин*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика: *Г. М. Дмитриев*
Технический редактор *Н. В. Лукина*
Корректор *А. К. Райхчин*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 25.10.06. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,2. Тираж 3000 экз. Заказ № 18142.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, г. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru.

БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

МАТЕМАТИКА

Геометрические решения негеометрических задач

- устанавливают внутрипредметные математические связи
- расширяют кругозор
- приобщают к творчеству
- содержат простые решения сложных задач
- полезны для самообразования

ISBN 978-5-09-015104-7

9 785090 151047

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО